Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Заочная физико-техническая школа

МАТЕМАТИКА

Тождественные преобразования. Решение уравнений

Задание №1 для 8-х классов

(2015 – 2016 учебный год)

г. Долгопрудный, 2015

Составитель: Т.Х. Яковлева, старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ.
Математика: задание №1 для 8-х классов (2015 – 2016 учебный год), 2015, 20 с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 15 октября 2015 г.

Учащийся должен стараться выполнять все задачи и контрольные вопросы в заданиях. Некоторая часть теоретического материала, а также часть задач и контрольных вопросов, являются сложными и потребуют от учащегося больше усилий при изучении и решении. В целях повышения эффективности работы с материалом они обозначены символом «*» (звёздочка). Мы рекомендуем приступать к этим задачам и контрольным вопросам в последнюю очередь, разобравшись вначале с более простыми.

Составитель:
Яковлева Тамара Харитоновна
Подписано в печать 08.06.15. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,25.
Уч.-изд. л. 1,11. Тираж 1500. Заказ №2-з.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(государственного университета)

ООО «Печатный салон ШАНС»

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141700.
ЗФТШ, тел./факс (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел./факс (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (498) 744-65-83 – **очное отделение.**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

© МФТИ, ЗФТШ, 2015

Все права защищены. Воспроизведение учебно-методических материалов и материалов сайта ЗФТШ в любом виде, полностью или частично, допускается только с письменного разрешения правообладателей.

Вступление

Дорогие ребята! Поздравляем вас с поступлением в заочную физико-техническую школу МФТИ. Вы получили первое задание по математике, в нем мало сложных задач, советуем вам внимательно изучить разработку, без ошибок ответить на контрольные вопросы и постараться решить предложенные вам задачи. Мало знать, как решить задачу, главное – уметь довести решение до конца и при этом не допустить арифметических ошибок. Не огорчайтесь, если вы не сможете справиться со всеми задачами. Вам вышлют решение задания, вы сможете посмотреть, как следует решать ту или иную задачу. В некоторых задачах мы указываем название учебного заведения (например, МГУ или МФТИ). Это означает, что данная задача предлагалась на вступительных экзаменах.

Обратите внимание, как оформлены решения в присланных вам заданиях и как записывают решения задач в ваших учебниках и задачниках.

Грамотный человек должен быть грамотным во всех предметах. Не забывайте о правилах грамматики, особенно о точках и запятых в ваших решениях. Постарайтесь аккуратно оформлять ваши решения.

Мы очень надеемся, что поможем вам в изучении математики. Рады будем видеть вас в будущем студентами нашего института.

Желаем вам больших успехов в этом году!

§1. Тождественные преобразования

В математике встречаются два вида математических выражений – числовые выражения и выражения с переменными. Примерами *числовых* являются выражения $3{,}8-2{,}1\left(\frac{5}{7}-\frac{3}{4}\right)$, $2+5(38:9)$.

Выражения вида $2x+1$, $3x^2+5$ называются *выражениями с одной переменной*. Выражение может содержать и несколько переменных, например, $2x^2y+xyz^3$, $5a^2b(x-y)^2$, $3t^2+v^3+1$.

Если в выражение с переменными подставить вместо переменных конкретные числа, то получим числовое выражение. После выполнения всех действий с числами получится число, которое называют *значением* выражения с переменными при выбранных значениях переменных.

Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, т. е. выполняются все указанные действия, называются *допустимыми значениями переменных*.

Значения двух выражений с переменными при одних и тех же значениях переменных называются *соответственными* значениями выражений. Например, соответственными значениями выражений $2x^2+1$ и $3x^3+5x+1$ при $x=1$ являются числа 3 и 9.

Два выражения (числовые или с переменными), соединенные знаком =, называют *равенством*. Числовые равенства могут быть верными и неверными. Равенства с переменными могут быть верными при одних значениях переменных и неверными при других значениях.

Равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных, называется *тождеством*.

Два выражения, принимающие равные соответственные значения при всех допустимых значениях переменных, называют *тождественно равными.*

Замену одного выражения другим, ему тождественно равным, называют *тождественным преобразованием* или просто преобразованием выражения.

Выражения, составленные из чисел и переменных с помощью конечного числа знаков арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления), называются *рациональными* выражениями. Рациональное выражение называется *целым*, если оно не содержит деления на выражение с переменными.

Примерами целых выражений являются одночлены и многочлены.

Одночленами называются числа, произведения чисел и натуральных степеней переменных, например, выражения 9, $25x^2$, $34abxy^4$ являются одночленами.

Для приведения одночлена к стандартному виду перемножают все входящие в него числовые множители, а произведения одинаковых переменных (или их степеней) заменяют степенью этой переменной.

Числовой множитель называется коэффициентом одночлена, а сумму показателей степеней переменных называют степенью одночлена. Если одночлен является числом или произведением чисел, то его называют одночленом нулевой степени.

Например, стандартным видом одночлена $0,3bxy(-2)a^2x^2y^3$ является одночлен $-0,6a^2bx^3y^4$, число – 0,6 является его коэффициентом, степень одночлена равна 10.

Многочленом называют сумму одночленов. Одночлен является частным случаем многочлена.

Одночлены называют подобными одночленами, если после их приведения к стандартному виду они оба либо совпадают, либо отличаются коэффициентами. Например, одночлены $2ax^2y$ и $-5ax^2y$ являются подобными.

Преобразование многочлена, при котором производится сложение и вычитание подобных членов, называется *приведением подобных*.

Например, $2ax+3by-ax+0,5by=ax+3,5by$.

Для приведения многочлена к *стандартному виду* каждый из входящих в него одночленов заменяют одночленом стандартного вида и приводят подобные члены.

Степенью многочлена называют наибольшую из степеней одночленов, составляющих многочлен после приведения его к стандартному виду, например, стандартным видом многочлена

$$2ax^5+xy^3+3xy^3-2ax^5+5$$

является многочлен $4xy^3+5,$ его степень равна 4.

Произведение двух многочленов равно сумме произведений каждого члена первого многочлена на каждый член второго многочлена.

Например, $(x+y)(2x^2-y)=2x^3+2x^2y-xy-y^2$.

Разложить многочлен на множители означает представить его в виде произведения многочленов.

При разложении многочлена на множители используют метод вынесения общего множителя за скобки и метод группировки членов.

Пример 1. Разложить на множители многочлен

$$2x^2y+y^2-2x^3-yx.$$

Группируя члены многочлена (т. е. представляя его в виде суммы двух многочленов) и вынося общий множитель в каждой группе, получаем

$$2x^2y+y^2-2x^3-yx=(2x^2y-2x^3)+(y^2-yx)=2x^2(y-x)+y(y-x).$$

Видим, что многочлен $y-x$ является общим множителем для обоих слагаемых. Вынося этот многочлен за скобки, окончательно получаем

$$2x^2y+y^2-2x^3-yx=(y-x)(2x^2+y). \ \blacktriangle$$

При тождественных преобразованиях многочленов часто используют формулы, носящие название «формулы сокращенного умножения»:

1. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. 2. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

3. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$. 4. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

5. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. 6. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

7. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

Пример 2. Разложить на множители многочлен x^3+x^2+x-3.

Δ Покажем, как, последовательно используя метод группировки, формулы 2 и 1 и метод вынесения общего множителя, можно разложить на множители данный многочлен:

$$x^3+x^2+x-3=(x^3-1)+(x^2-1)+(x-1)=$$

$$=(x-1)(x^2+x+1)+(x-1)(x+1)+(x-1)=$$

$$=(x-1)(x^2+x+1+x+1+1)=(x-1)(x^2+2x+3). \ \blacktriangle$$

Пример 3. Разложить на множители многочлен $3x^2y^4-24x^5y$.

Δ Сначала выносим общий множитель $3x^2y$ за скобку:

$$3x^2y^4-24x^5y=3x^2y(y^3-8x^3).$$

Затем к многочлену y^3-8x^3 применим формулу для разности кубов:

$$y^3-8x^3=(y-2x)(y^2+2xy+4x^2).$$

В результате получим

$$3x^2y^4-24x^5y=3x^2y(y-2x)(y^2+2xy+4x^2). \ \blacktriangle$$

Пример 4. Разложить на множители многочлен

$$27x^3+y^3+3y^2+3y+1.$$

Δ Заметим, что $y^3+3y^2+3y+1=(y+1)^3$, а $27x^3=(3x)^3$, тогда получаем $(3x)^3+(y+1)^3$. Применяем формулу 3, получим

$$(3x)^3+(y+1)^3=(3x+y+1)(9x^2-3x(y+1)+(y+1)^2).$$

Таким образом,

$$27x^3+y^3+3y^2+3y+1=$$

$$=(3x+y+1)(9x^2-3xy-3x+y^2+2y+1). \ \blacktriangle$$

Пример 5. Разложить на множители многочлен

$$y^8+y^4+1.$$

Δ Покажем на этом примере ещё один способ разложения на множители. Прибавим и вычтем выражение y^4, получаем:

$$y^8+y^4+1+y^4-y^4=y^8+2y^4+1-y^4=\left(y^4+1\right)^2-\left(y^2\right)^2.$$

А теперь применяем формулу для разности квадратов:

$$\left(y^4+1\right)^2-\left(y^2\right)^2=\left(y^4+1+y^2\right)\left(y^4+1-y^2\right). \blacktriangle$$

§2. Выделение полного квадрата из квадратного трёхчлена

Выражения вида $2x^2+3x+5,\ -4x^2+5x+7$ носят название квадратного трёхчлена. В общем случае квадратным трёхчленом называют выражение вида $ax^2+bx+c,$ где $a, b, c-$ произвольные числа, причём $a \neq 0.$

Рассмотрим квадратный трёхчлен x^2-4x+5. Запишем его в таком виде: $x^2-2\cdot 2\cdot x+5$. Прибавим к этому выражению 2^2 и вычтем 2^2, получаем: $x^2-2\cdot 2\cdot x+2^2-2^2+5$. Заметим, что $x^2-2\cdot 2\cdot x+2^2=\left(x-2\right)^2$, поэтому $x^2-4x+5=\left(x-2\right)^2-4+5=\left(x-2\right)^2+1$. Преобразование, которое мы сделали, носит название «выделение полного квадрата из квадратного трёхчлена».

Пример 1. Выделите полный квадрат из квадратного трёхчлена

$$9x^2+3x+1.$$

Δ Заметим, что $9x^2=\left(3x\right)^2$, $3x=2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 3x$. Тогда $9x^2+3x+1=$ $=\left(3x\right)^2+2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 3x+1$. Прибавим и вычтем к полученному выражению $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$, получаем $\left(\left(3x\right)^2+2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 3x+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)+1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(3x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$. $\blacktriangle$

Покажем, как применяется метод выделения полного квадрата из квадратного трёхчлена для разложения квадратного трёхчлена на множители.

Пример 2. Разложить на множители квадратный трёхчлен

$$4x^2-12x+5.$$

Δ Выделяем полный квадрат из квадратного трёхчлена:

$$\left(2x\right)^2-2\cdot 2x\cdot 3+3^2-3^2+5=(2x-3)^2-4=(2x-3)^2-2^2.$$

Теперь применяем формулу $a^2-b^2=\left(a-b\right)\left(a+b\right)$, получаем:

$$\left(2x-3-2\right)\left(2x-3+2\right)=\left(2x-5\right)(2x-1). \blacktriangle$$

Пример 3. Разложить на множители квадратный трёхчлен

$$-9x^2+12x+5.$$

Δ $-9x^2+12x+5=-\left(9x^2-12x\right)+5$. Теперь замечаем, что $\left(9x^2\right)=\left(3x\right)^2$, $-12x=-2\cdot 3x\cdot 2$. Прибавляем к выражению $9x^2-12x$ слагаемое 2^2, получаем:

$$-\left(\left(3x\right)^2-2\cdot 3x\cdot 2+2^2-2^2\right)+5=-\left(\left(3x-2\right)^2-4\right)+5=$$
$$=-\left(3x-2\right)^2+4+5=-\left(3x-2\right)^2+9=3^2-\left(3x-2\right)^2.$$

Применяем формулу для разности квадратов, имеем:

$$-9x^2+12x+5=\left(3-\left(3x-2\right)\right)\left(3+\left(3x-2\right)\right)=\left(5-3x\right)\left(3x+1\right). \ \blacktriangle$$

Покажем, как применяется метод выделения полного квадрата для нахождения наибольшего или наименьшего значений квадратного трёхчлена.

Рассмотрим квадратный трёхчлен x^2-x+3. Выделяем полный квадрат: $\left(x\right)^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+3=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$. Заметим, что при $x=\frac{1}{2}$ значение квадратного трёхчлена равно $\frac{11}{4}$, а при $x\neq\frac{1}{2}$ к значению $\frac{11}{4}$ добавляется положительное число, поэтому получаем число, большее $\frac{11}{4}$. Таким образом, наименьшее значение квадратного трёхчлена равно $\frac{11}{4}$, и оно получается при $x=\frac{1}{2}$.

Пример 4. Найдите наибольшее значение квадратного трёхчлена $-16x^2+8x+6$.

Δ Выделяем полный квадрат из квадратного трёхчлена:

$$-16x^2+8x+6=-\left(\left(4x\right)^2-2\cdot 4x\cdot 1+1-1\right)+6=$$
$$=-\left(\left(4x-1\right)^2-1\right)+6=-\left(4x-1\right)^2+7.$$

При $x=\frac{1}{4}$ значение квадратного трёхчлена равно 7, а при $x\neq\frac{1}{4}$ из числа 7 вычитается положительное число, то есть получаем число, меньшее 7. Таким образом, число 7 является наибольшим значением квадратного трёхчлена, и оно получается при $x=\frac{1}{4}$. ▲

Пример 5. Разложите на множители числитель и знаменатель дроби $\frac{x^2+2x-15}{x^2-6x+9}$ и сократите эту дробь.

Δ Заметим, что знаменатель дроби $x^2-6x+9=(x-3)^2$.

Разложим числитель дроби на множители, применяя метод выделения полного квадрата из квадратного трёхчлена.

$$x^2+2x-15=(x)^2+2\cdot x\cdot 1+1-1-15=(x+1)^2-16=(x+1)^2-4^2=$$
$$=(x+1+4)(x+1-4)=(x+5)(x-3).$$

Данную дробь привели к виду $\frac{(x+5)(x-3)}{(x-3)^2}$, после сокращения на $(x-3)$ получаем $\frac{(x+5)}{(x-3)}$. ▲

Пример 6. Разложите многочлен x^4-13x^2+36 на множители.

Δ Применим к этому многочлену метод выделения полного квадрата.

$$x^4-13x^2+36=\left(x^2\right)^2-2\cdot x^2\cdot\frac{13}{2}+\left(\frac{13}{2}\right)^2-\left(\frac{13}{2}\right)^2+36=$$
$$=\left(x^2-\frac{13}{2}\right)^2-\frac{169}{4}+36=\left(x^2-\frac{13}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=\left(x^2-\frac{13}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2=$$
$$=\left(x^2-\frac{13}{2}-\frac{5}{2}\right)\left(x^2-\frac{13}{2}+\frac{5}{2}\right)=\left(x^2-9\right)\left(x^2-4\right)=$$
$$=(x-3)(x+3)(x-2)(x+2).\ ▲$$

Пример 7. Разложите на множители многочлен $4x^2+4xy-3y^2$.

Δ Применяем метод выделения полного квадрата. Имеем:

$$(2x)^2+2\cdot 2x\cdot y+y^2-y^2-3y^2=(2x+y)^2-(2y)^2=$$
$$=(2x+y+2y)(2x+y-2y)=(2x+3y)(2x-y).\ ▲$$

Пример 8. Применяя метод выделения полного квадрата, разложите на множители числитель и знаменатель и сократите дробь

$$\frac{8x^2+10x-3}{2x^2-x-6}.$$

$$8x^2+10x-3=8\left(x^2+\frac{10}{8}x-\frac{3}{8}\right)=$$

$$=8\left(x^2+2\cdot\frac{5}{8}x+\left(\frac{5}{8}\right)^2-\left(\frac{5}{8}\right)^2-\frac{3}{8}\right)=8\left(\left(x+\frac{5}{8}\right)^2-\frac{25}{64}-\frac{24}{64}\right)=$$

$$=8\left(\left(x+\frac{5}{8}\right)^2-\left(\frac{7}{8}\right)^2\right)=8\left(x+\frac{5}{8}+\frac{7}{8}\right)\left(x+\frac{5}{8}-\frac{7}{8}\right)=$$

$$=8\left(x+\frac{12}{8}\right)\left(x-\frac{2}{8}\right)=8\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)=(2x+3)(4x-1).$$

Преобразуем знаменатель дроби:

$$2x^2-x-6=2\left(x^2-\frac{x}{2}-\frac{6}{2}\right)=2\left(x^2-2\cdot\frac{1}{4}x+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{6}{2}\right)=$$

$$=2\left(\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{7}{4}\right)^2\right)=2\left(x-\frac{1}{4}-\frac{7}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}+\frac{7}{4}\right)=$$

$$=2(x-2)\left(x+\frac{3}{2}\right)=(x-2)(2x+3).$$

Имеем: $\dfrac{(2x+3)(4x-1)}{(x-2)(2x+3)}=\dfrac{4x-1}{x-2}$. ▲

§3. Уравнения с одной переменной

Равенство, содержащее переменную, называют *уравнением с одной переменной* или уравнением с одним неизвестным. Например, уравнением с одной переменной является равенство $2(3x+5)=4x-1$. *Корнем* или *решением* уравнения называется значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство. Например, число 1 является решением уравнения $3x+5=9x-1$. Уравнение $x^2+1=0$ не имеет решений, т. к. левая часть уравнения всегда больше нуля. Уравнение $(x-1)(x+2)=0$ имеет два корня: $x_1=1$ и $x_2=-2$.

Решить уравнение – значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Уравнения называются *равносильными*, если каждое решение первого уравнения является решением второго и каждое решение второго уравнения является решением первого или если оба уравнения не имеют решений.

При решении уравнений используют следующие свойства:

1) если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному;

2) если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

Уравнение вида $ax = b$, где x – переменная, a и b – некоторые числа, называется *линейным уравнением* с одной переменной.

Если $a \neq 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = \dfrac{b}{a}$.

Если $a = 0$ и $b = 0$, то уравнению удовлетворяет любое значение x, а если $a = 0$, а $b \neq 0$, то уравнение не имеет решений, т. к. $0 \cdot x = b$ не выполняется ни при одном значении переменной.

Пример 1. Решите уравнение

$$2,5x - (x+1) = (3x-1) - 2x + 1.$$

Δ Раскроем скобки в обеих частях уравнения, перенесем все слагаемые с x в левую часть уравнения, а слагаемые, не содержащие x, в правую часть, получаем:

$$2,5x - x - 3x + 2x = 1 - 1 + 1. \quad 0,5x = 1, \quad x = 2.$$

Ответ: 2. ▲

Пример 2. Решите уравнение:

а) $2x^2 - 3x = 0$; б) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$; в) $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Δ а) Преобразуем уравнение: $x(2x-3) = 0$. Произведение равно нулю, если один из сомножителей равен нулю, получаем $x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{3}{2}$.

Ответ: $0; \dfrac{3}{2}$.

б) Разложим на множители левую часть уравнения:

$$x^2(x-2) - 9(x-2) = (x-2)(x^2-9) = (x-2)(x-3)(x+3).$$

Отсюда видно, что решениями этого уравнения являются числа

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = -3.$$

Ответ: $2; 3; -3$.

в) Это уравнение называется квадратным, вы подробно изучите эти уравнения в 8-м классе. Но покажем, как можно решать такие уравнения. Представим $5x$ как $2x+3x$, тогда имеем:

$$x^2+2x+3x+6=0,$$
$$x(x+2)+3(x+2)=0,\ (x+2)(x+3)=0,$$

отсюда видно, что $x_1=-2, x_2=-3$.

Это уравнение можно решать и методом выделения полного квадрата. Представим выражение $5x=2\cdot\frac{5}{2}x$. И прибавим и вычтем в левой части уравнения число $\frac{25}{4}$, получаем:

$$x^2+2\cdot\frac{5}{2}\cdot x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+6=0,\ \left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+6=0,$$
$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0,\ \left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=0,$$
$$\left(x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right)=0,\ (x+2)(x+3)=0.$$

Откуда следует, что $x_1=-2$ и $x_2=-3$.

Ответ: $-2;-3$. ▲

Пример 3. Являются ли данные уравнения равносильными:

а) $|x-1|=2$ и $2x-5=1$;

б) $\frac{(x-3)(x+7)}{x-3}=0$ и $(x-3)(x+7)=0$.

Δ а) Если $|x-1|=2$, то $x-1=2$, $x=3$, или $x-1=-2$, $x=-1$. Первое уравнение имеет два решения: -1 и 3.

Второе уравнение имеет одно решение $x=3$. Число (-1) является решением первого уравнения и не является решением второго уравнения, следовательно, данные уравнения не являются равносильными.

б) Число $x=3$ является решением второго уравнения и не является решением первого уравнения, т. к. при $x=3$ не определена дробь, стоящая в левой части первого уравнения, поэтому данные уравнения не являются равносильными. ▲

§4. Модуль числа

Дадим определение модуля числа. Если число положительное, то его модуль равен самому числу. Например, $|2,5| = 2,5$; $\left|1\frac{3}{4}\right| = 1\frac{3}{4}$. Если число отрицательное, то его модуль равен противоположному числу. Например, $|-3,1| = 3,1$; $\left|-2\frac{3}{7}\right| = 2\frac{3}{7}$.

Модуль нуля равен нулю.

Запишем определение модуля таким образом: $|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$

Докажем некоторые свойства модуля.

Свойство 1. Для любого числа x выполняется условие $|x| \geq 0$.

Действительно, если $x > 0$, то $|x| = x$ и тогда $|x| > 0$. Если $x < 0$, то $|x| = -x$, но $-x > 0$, значит $|x| > 0$. И если $x = 0$, то $|x| = 0$.

Таким образом, $|x| \geq 0$ для любого x. При этом заметим, что $|x| > 0$, если $x \neq 0$, и $|x| = 0$, если $x = 0$.

Пример 1. При каких значениях x выполняются равенства:

а) $|x| = 5$; б) $|x| = -3$; в) $|x-1| = 2$?

а) Если x положительное, то $x = 5$; если x отрицательное, то $-x = 5$, т. е. $x = -5$.

б) По свойству 1 выполняется условие $|x| \geq 0$, а у нас условие $|x| = -3 < 0$. Следовательно, не существует чисел, для которых выполнялось бы данное условие.

в) По определению модуля числа следует, что если $x - 1 \geq 0$, т. е. $x \geq 1$, то $|x-1| = x - 1 = 2$, отсюда следует, что $x = 3$. Если же $x < 1$, то $x - 1 < 0$ и $|x-1| = -(x-1)$, получаем равенство $-x + 1 = 2$, $-x = 1$, $x = -1$. В дальнейшем мы такие уравнения будем решать коротко, а именно, рассуждаем так: если модуль какого-то выражения равен 2, то либо это выражение равно 2, либо равно (-2). Если $|x-1| = 2$, то получаем два случая: $x - 1 = 2, x = 3$ и $x - 1 = -2, x = -1$. ▲

Свойство 2. Для любых чисел x и y выполняется условие

$$|xy| = |x| \cdot |y|.$$

Если числа x и y положительные, то $xy > 0, |xy| = xy, |x| = x, |y| = y,$ получаем верное равенство $xy = xy.$

Если числа x и y отрицательные, то $xy > 0, |xy| = xy, |x| = -x,$ $|y| = -y,$ получаем верное равенство $xy = (-x)(-y), xy = xy.$

Если $x > 0,$ а $y < 0,$ то $xy < 0, |xy| = -xy, |x| = x, |y| = -y,$ получаем верное равенство $-xy = -xy.$

Аналогично доказывается, если $x < 0,$ а $y > 0.$

Если одно из чисел x и y равно нулю, то обе части равенства $|xy| = |x| \cdot |y|$ равны нулю, т. е. равенство верное.

Пример 2. При каких значениях x верно равенство $|-5x - 10| = 15.$

Δ $|-5x - 10| = |-5(x+2)| = |-5| \cdot |x+2| = 5|x+2|.$ Таким образом, получили равенство $5|x+2| = 15, |x+2| = 3,$ отсюда следует, что

$$x + 2 = 3,\ x = 1 \text{ и } x + 2 = -3, x = -5.$$

Ответ: $1; -5.$ ▲

Аналогично свойству 2 можно доказать свойство $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$ Исходя из определения модуля числа, можно доказать, что для любого числа x верно равенство $|x| = |-x|.$

Пример 3. Решите уравнение $|-3x - 1| - 2x = 2.$

Δ $|-3x - 1| = \left|-3\left(x + \frac{1}{3}\right)\right| = |-3| \cdot \left|x + \frac{1}{3}\right| = 3\left|x + \frac{1}{3}\right|.$ После этих преобразований получили уравнение $3 \cdot \left|x + \frac{1}{3}\right| - 2x = 2.$ Из определения модуля следует, что $\left|x + \frac{1}{3}\right| = x + \frac{1}{3},$ если $x + \frac{1}{3} \geq 0,$ т. е. $x \geq -\frac{1}{3}$ и $\left|x + \frac{1}{3}\right| = -x - \frac{1}{3},$ если $x < -\frac{1}{3}.$

а) Если $x \geq -\frac{1}{3},$ то получаем уравнение $3\left(x + \frac{1}{3}\right) - 2x = 2,$ $x + 1 = 2,$

$x=1$. Число $1>-\frac{1}{3}$, поэтому число $x=1$ является решением уравнения.

б) Если $x<-\frac{1}{3}$, то получаем уравнение $3\left(-x-\frac{1}{3}\right)-2x=2$, $-5x=3$, $x=-\frac{3}{5}<-\frac{1}{3}$. **Ответ:** $-\frac{3}{5};1$. ▲

Пример 4. Решите уравнение $|x-1|+|x+1|=2$.

Δ Напомним определение модуля числа: $|a|=\begin{cases} a, \ a\geq 0, \\ -a, \ a<0. \end{cases}$

В данном уравнении под знаком модуля стоят числа $x-1$ и $x+1$. Если x меньше, чем -1, то число $x+1$ отрицательное, тогда $|x+1|=-x-1$. А если $x>-1$, то $|x+1|=x+1$. При $x=-1$ имеем $|x+1|=0$. Таким образом, $|x+1|=\begin{cases} x+1, \ x\geq -1, \\ -x-1, \ x<-1. \end{cases}$

Аналогично $|x-1|=\begin{cases} x-1, \ x\geq 1, \\ -x+1, \ x<1. \end{cases}$

а) Рассмотрим наше уравнение при $x\leq -1$, оно равносильно уравнению $-x+1-x-1=2$, $-2x=2$, $x=-1$. Это число принадлежит множеству $x\leq -1$.

б) Пусть теперь $-1<x\leq 1$, тогда данное уравнение равносильно уравнению $-x+1+x+1=2$, $0\cdot x=0$, последнему уравнению удовлетворяет любое число, но так как мы рассматриваем множество $-1<x\leq 1$, значит, этому уравнению удовлетворяют все числа из этого множества.

в) Рассмотрим случай $x>1$. Уравнение равносильно уравнению $x-1+x+1=2$, $x=1$. Число $x=1$ мы получили уже в пункте б).

Ответ: уравнению удовлетворяют все числа, удовлетворяющие условию $-1\leq x\leq 1$. ▲

Уравнения с параметром

Рассмотрим уравнение $(a-3)(a-2)x=(a-3)(a+5)$. Такие уравнения носят название «уравнения с параметром». Здесь $x-$ неизвестное, а $a-$ параметр. Требуется найти решение x при любых значениях параметра a.

Если $a=3$, то уравнение принимает вид: $0\cdot x=0$, этому уравнению удовлетворяет любое число x, т. е. в этом случае уравнение имеет бесконечно много решений.

Если $a=2$, то уравнение принимает вид: $0\cdot x=-7$, это уравнение не имеет решений.

Если $a\neq 3$ и $a\neq 2$, то обе части уравнения можно разделить на $(a-3)(a-2)$, тогда получаем: $x=\dfrac{(a-3)(a+5)}{(a-3)(a-2)}=\dfrac{a+5}{a-2}$. Таким образом, если $a\neq 3$ и $a\neq 2$, то уравнение имеет единственное решение и при этом $x=\dfrac{a+5}{a-2}$.

§5. Графики функций $y=kx+b$ и $y=|x|$

Вам уже известно из школьного курса, что графиком функции $y=kx+b$ является прямая. Для построения графика достаточно указать две точки, принадлежащие прямой, и затем через эти две точки провести прямую.

Пример 1. Постройте график функций: а) $y=2x+3$; б) $y=2$.

Δ а) При $x=0$; $y=3$; при $x=1$; $y=5$. Проводим прямую через точки $(0;3)$ и $(1;5)$. График прямой приведён на рис. 1.

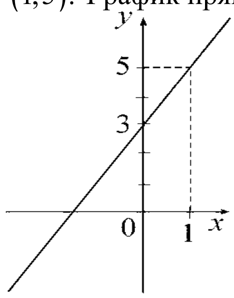

Рис. 1

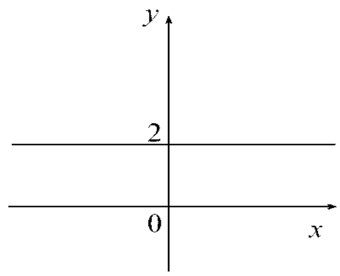

Рис. 2

б) Для любого значения x значение $y=2$. Графиком этой функции является прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку $(0;2)$. График этой функции приведён на рис. 2. ▲

Построим теперь график функции $y=|x|$. Из определения модуля числа следует, что

$$y=\begin{cases} x, \text{ если } x>0, \\ 0, \text{ если } x=0, \\ -x, \text{ если } x<0. \end{cases}$$

При $x \ge 0$ $y=x$, графиком функции при $x \ge 0$ является часть прямой $y=x$. А при $x<0$ графиком функции является часть прямой $y=-x$. График функции $y=|x|$ приведён на рис. 3.

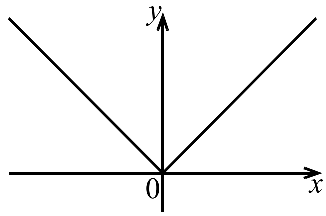

Рис. 3

Пример 2. Постройте график функции $y=|x+1|-|x-2|$.

Δ Выражение $x-2$ равно нулю при $x=2$. Если $x>2$, то $x-2>0$, поэтому $|x-2|=x-2$. А если $x<2$, то $x-2<0$, тогда $|x-2|= =-(x-2)=-x+2$. Выражение $x+1$ равно нулю, если $x=-1$. Если $x>-1$, то $x+1>0$, тогда $|x+1|=x+1$. А если $x<-1$, то $x+1<0$, тогда

$$|x+1|=-(x+1)=-x-1.$$

Пусть $x \ge 2$, тогда $|x-2|=x-2$, $|x+1|=x+1$, поэтому $y=x+1-(x-2)=3$.
Если $-1<x<2$, то $|x-2|=2-x$, $|x+1|=x+1$, тогда $y=x+1-2+x=2x-1$.
Если $x \le -1$, то $|x+1|=-x-1$, $|x-2|=2-x$, тогда $y=-x-1-2+x=-3$.

Таким образом, $y=\begin{cases} 3, \text{ если } x \ge 2; \\ 2x-1, \text{ если } -1<x<2; \\ -3, \text{ если } x \le -1. \end{cases}$

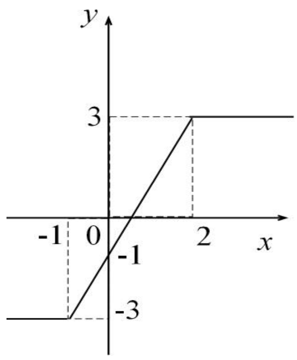

Рис. 4

Заметим, что прямая $y=2x-1$ проходит через точки $(-1;-3)$ и $(2;3)$. График данной функции приведён на рис. 4.

Пример 3. Постройте график функции $y=\begin{cases} |x-3|, \; x \ge 0; \\ |x+4|-1, \text{ если } x<0. \end{cases}$

Используя график функции, определите, сколько будет точек пересечения графика функции с прямой $y = a$ при различных значениях параметра a.

Δ Из определения модуля следует, что

$$|x-3| = \begin{cases} 3-x, \text{ если } x \in [0;3]; \\ x-3, \text{ если } x > 3. \end{cases}$$

Далее $|x+4|-1 = \begin{cases} -4-x-1, \text{ если } x \le -4; \\ 4+x-1, \text{ если } x \in (-4;0). \end{cases}$

График данной функции приведён на рис. 5.

Если $a < -1$, то прямая $y = a$ не пересекает график данной функции.

Если $a = -1$, то прямая пересекает график функции в точке $(-4;-1)$.

Если $a \in (-1;0)$, то будет две точки пресечения.

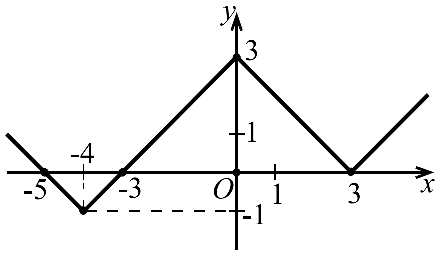

Рис. 5

Если $a = 0$, то прямая $y = 0$ пересекает график функции в точках $(-5;0), (-3;0), (3;0)$.

Если $a \in (0;3)$, то получается 4 точки пересечения.

Если $a = 3$, то будет 3 точки пересечения.

Если $a > 3$, то будет 2 точки пересечения.

Контрольные вопросы

1(1). Запишите произведение одночленов

$$\left(-\frac{3}{5}a^2b^5\right)^3 \cdot \left(1\frac{2}{3}a^3b\right)^2 \cdot \left(-\frac{25}{9}ab\right).$$

в виде одночлена стандартного вида. Определите степень этого одночлена.

2(1). Преобразуйте выражение

$$(a-3)(a-4)(a^2-7a+12)$$

в многочлен стандартного вида. Определите степень полученного многочлена.

3(2). Выделите полный квадрат из квадратного трёхчлена

$$16x^2+4x+5.$$

4(2). Разложите на множители квадратный трёхчлен

$$3x^2+5x-2.$$

5(4). Разложите на множители числитель и знаменатель дроби и сократите её:

$$\frac{5x^2+14x-3}{3x^2+10x+3}.$$

6(4). Решите уравнение

а) $\dfrac{2x-3}{2}+\dfrac{x+1}{3}=2x+1;$ б) $|3-2x|=5;$

в) $(2x+1)(3x-2)=0;$ г) $|7x-3|=|8x+5|.$

7(3). Являются ли данные уравнения равносильными:

а) $|2x-1|=3$ и $3(x+5)+2(x-1)=23;$

б) $|x-6|=-1$ и $3x^2+8=0;$

в) $|3x+2|=7$ и $(x+3)(3x-5)=0.$

8(2). Решите уравнение $2ax-2a=x-1$ для любого значения параметра a.

9(3). Постройте график функции

$$y=|x-3|-|x+2|.$$

10(3). Упростите и вычислите при $a=100$:

$$\left(\frac{a+2}{a^3-8}+\frac{1}{4-a^2}\right):\frac{a+2}{8a-a^4}-\frac{8(a+1)}{(a+2)^2}+\frac{1}{a}.$$

Задачи

1(3). Вычислите (не используя калькулятор):

$$\frac{2\frac{3}{4}:1,1+3\frac{1}{3}}{2,5-0,4\cdot 3\frac{1}{3}}:\frac{5}{7}-\frac{\left(2\frac{1}{6}+4,5\right)\cdot 0,375}{2,75-1\frac{1}{2}}.$$

2(6). Разложите на множители многочлен:

а) $x^4-25x^2+144;$

б) $2x^2 - xy - 6y^2$;

в) $x^4 + 4$.

3(2). Найдите наименьшее значение квадратного трёхчлена

$$4x^2 - 3x + 1.$$

4(2). Найдите наибольшее значение квадратного трёхчлена

$$-2x^2 + 7x - 2.$$

5(3). Решите уравнение $10\left|\left|x-3\right|-4\right| = x+2$.

6(3). Найдите все натуральные числа, разность квадратов которых равна 455.

7(3). Решите уравнение

$$(3a-5)(2a+1)x = (3a-5)(4a-3)$$

для любого значения параметра a.

8(4). Постройте график функции

$$y = \begin{cases} |x-2|-1, \text{ если } x \ge 0, \\ 2x+1, \text{ если } x \in (-2;0), \\ -3x-9, \text{ если } x \le -2. \end{cases}$$

Используя график функции, укажите, сколько корней имеет уравнение $y(x) = a$ при различных значениях параметра a.

9(3). Задано двузначное число. Число его десятков на 3 меньше числа единиц. Если это число разделить на сумму его цифр, то в частном получаем 4 и в остатке 6. Найдите это число.

10(3). Из трёх насосов бассейн наполняется за 5 часов. Производительности насосов относятся как 3:4:5. Сколько часов заполнялся бассейн, если сначала работал только первый насос, через час включились второй и третий, а ещё через час первый насос сломался?

11(3). В первой канистре находится пятипроцентный раствор соли, а во второй канистре – десятипроцентный. В пустое ведро выливают половину раствора из каждой канистры. В результате ведро содержит семипроцентный раствор. Во сколько раз масса раствора в первой канистре больше массы раствора во второй?

*

12(4). Ученик идёт в школу со скоростью 5 км/ч. За минуту до звонка он спохватывается и бежит весь оставшийся путь со скоростью 20 км/ч. В результате он опаздывает на одну минуту. За сколько секунд до звонка должен был спохватиться школьник, чтобы успеть вовремя?