Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Заочная физико-техническая школа

МАТЕМАТИКА

Геометрия

Задание №2 для 8-х классов

(2015 – 2016 учебный год)

г. Долгопрудный, 2015

Составитель: Т.С. Пиголкина, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №2 для 8-х классов (2015– 2016 учебный год), 2015, 24 с.

Дата отправления заданий по физике и математике – 29 ноября 2015 г.

Составитель:
Пиголкина Татьяна Сергеевна
Подписано 17.10.15. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,5.
Уч.-изд. л. 1,33. Тираж 450. Заказ №15-з.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(государственного университета)

ООО «Печатный салон ШАНС»

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Москов. обл., 141700.
ЗФТШ, тел./факс (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел./факс (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (499) 755-55-80 – **очное отделение.**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: *www.school.mipt.ru*

Это первое задание по геометрии в ЗФТШ. Будет два задания в 9 классе и одно задание в 10 классе.

Мы не можем повторить материал всего учебника и выбираем для повторения некоторые темы, некоторый круг теорем, знакомим вас с методами решения задач.

В этом задании мы обсудим, что и как изучается в геометрии. Во втором параграфе повторим теоремы о равенстве треугольников, о равнобедренном треугольнике, об углах треугольника, в §3 подробно остановимся на задачах построения с помощью циркуля и линейки. Основные построения уже рассмотрены вами в школе, а здесь покажем применение этих построений в решении других задач.

В §4 (дополнительном) приведены задачи, которые относятся к «занимательным задачам наглядной геометрии». Они предлагаются тем, кто в решении подобных задач находит и интерес и пользу.

В конце задания контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения. Примеры ответов на контрольные вопросы приведены перед самими вопросами.

§ 1. Наука геометрия

Одна из замечательных теорем геометрии, доказательство которой вам уже известно по учебнику, гласит: «сумма углов треугольника равна $180°$». Как вы думаете, можно ли было установить этот факт экспериментально?

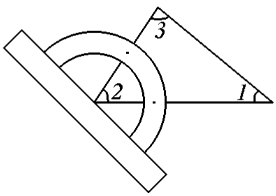

Рис. 1

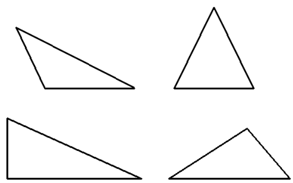

Рис. 2

Предположим, что мы будем измерять угол, равный сумме углов треугольника, транспортиром. Нарисуем некоторый треугольник, приложим транспортир к одному из углов – углу 1, отметим его величину, затем приложим транспортир к другому углу (рис. 1), отметим величину суммы двух углов, затем приложим транспортир к третьему углу. Мы обнаружим, что третья отметка придётся на $180°$. Следует ли из наших измерений, что сумма углов рассмотренного треугольника точно равна $180°$? А может быть больше на 1/10 градуса или меньше на 2/15 градуса? Такую разницу, как бы тщательно мы ни проводили измерения с помощью транспортира, заметить невозможно.

Кроме того, любой нарисованный треугольник, можно сказать, имеет «дефект»: как бы тонок ни был карандаш, которым его рисовали, стороны треугольника, если рассмотреть рисунок в увеличительное стекло, предстанут перед нами широкими неровными полосами. Какой же угол мы измеряли? Поэтому сомнения в точности наших измерений ещё более возрастут, и вывод может быть сделан только такой: сумма углов треугольника на рис. 1 близка к 180°.

Предположим, что аналогичные измерения мы провели в каждом из треугольников, изображённых на рис. 2, и получили такие же результаты. Тогда мы можем предположить, выдвинуть *гипотезу*[1], что в любом нарисованном треугольнике сумма углов близка к $180°$. Но даже такую гипотезу проверить экспериментально не представляется возможным, т. к. пришлось бы провести измерения во всех разнообразных треугольниках, т. е. в бесконечном числе случаев, что, конечно, неосуществимо.

Мы привели эти рассуждения, чтобы обратить ваше внимание на следующие важные моменты. Попытки экспериментально установить свойства фигур неосуществимы по ряду причин: из-за бесконечного разнообразия видов фигур, из-за «дефектности» самих фигур и, наконец, из-за неизбежных ошибок измерения.

В науке геометрии рассматриваются не реальные, конкретные фигуры, вырезанные из картона, нарисованные на листе бумаги и т.п., а *идеальные,* как говорят, *абстрактные*[2] фигуры, которые целиком описываются только своими определениями. Реальные треугольники имеют не только форму и размер, они могут быть сделаны из картона или жести, бумаги или дерева и т. п. Отвлекаясь от всех их свойств, кроме формы и размера, т. е. выделяя общее для всех таких фигур, приходят к представлению о *геометрическом треугольнике* как фигуре, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки.

[1] Гипотеза – от греческого $\upsilon\pi o$ – под, внизу и $\vartheta\varepsilon\sigma\iota\zeta$ – положение, утверждение – предположительное суждение о закономерной связи явлений.
[2] Абстракция – от латинского abstractio – отвлечение.

Только для абстрактных геометрических фигур удается установить ряд простых и важных свойств. Именно для абстрактных геометрических треугольников справедливо утверждение, что сумма углов в каждом из них равна $180°$. Истинность этого утверждения, как и других утверждений, называемых теоремами[3], устанавливается методом строгих рассуждений, основанных на логике и вытекающих из ранее доказанных утверждений. Как вы сами убедились, эти рассуждения столь убедительны, что с ними соглашается всякий, рассмотревший их.

Метод строгих геометрических доказательств, основанных на логике, когда одно утверждение вытекает из ранее установленного, является основным методом в геометрии. В этом смысле геометрию называют *дедуктивной* наукой, от латинского слова deductio – выведение.

Если разобрать вывод, т. е. доказательство какой-нибудь геометрической теоремы, то он логически следует из ранее доказанных теорем. Для этих ранее доказанных теорем, в свою очередь, можно выделить те факты, из которых они выводятся и которые были установлены ранее.

Но ведь есть какое-то первое утверждение, которое не вытекает из ранее доказанного, так как вообще нет теорем, которые уже были доказаны до этого. Это означает, что некоторые факты должны быть приняты без доказательства. Их называют *аксиомами*, от греческого $\alpha\xi\iota\omega\mu\alpha$ – удостоенное, принятое положение.

Так же обстоит дело с определениями геометрических объектов. Вводя новое определение, пользуются определениями и понятиями, которые уже были введены раньше. Но как быть с первым определением? Через что его определить, если еще нет понятий, определенных ранее? Отсюда следует, что некоторые геометрические понятия должны быть введены без каких-либо определений. Такие неопределяемые понятия называются *основными*. В изучаемом курсе геометрии таковы понятия точки, прямой, плоскости.

Итак, все здание геометрии строится, во-первых, на основных неопределяемых понятиях, и, во-вторых, на аксиомах, в которых устанавливаются связи и взаимоотношения между первоначальными понятиями; затем с помощью определений вводятся новые понятия, для которых, исходя из первоначальных фактов, содержащихся в аксиомах, доказываются, выводятся с помощью логики, дальнейшие факты – теоремы.

Подобное строение какой-нибудь области математики называют аксиоматическим. Таким образом, *геометрия – аксиоматическая наука*.

[3] Теорема – от греческого $\vartheta\varepsilon\omega\rho\varepsilon\omega$ – рассматриваю.

Из всего сказанного вывод такой: хотите освоить науку геометрию (хотя бы в рамках школьной программы) – разберите аксиомы, учите определения и формулировки теорем, с которыми вас постепенно знакомит учебник, наизусть, как стихи. А умение рассуждать, доказывать, умение применять теорию в решении задач приходят постепенно. Этому способствуют разбор доказательств теорем из учебника (за две с лишним тысячи лет математики отобрали самые лучшие и простые доказательства – именно их вам приводят в учебнике), разбор решений характерных задач, овладение методами решений.

§ 2. Признаки равенства треугольников. Равнобедренный треугольник. Прямоугольный треугольник. Теоремы об углах

Для повторения мы выбрали эти темы. Приводить доказательство теорем, содержащихся в учебнике, не будем, лишь напомним основные теоремы. Также обсудим некоторые важные вопросы, приведём примеры решения задач, докажем несколько дополнительных теорем (Всякое утверждение, сформулированное в общем виде и доказанное, есть теорема, но их так много и они часто столь просты, что наполнять ими учебник не имеет смысла, а вот учиться на них применению основных теорем, умению рассуждать, делать выводы, – очень полезно). Такие теоремы мы будем называть **леммами.**

Начало решения примера (задачи) будем обозначать символом Δ, окончание – символом ▲.

В учебнике доказаны три признака равенства треугольников.

Первый признак: по двум сторонам и углу между ними.

Второй признак: по стороне и прилежащим к ней углам.

Третий признак: по трём сторонам.

Мы напомнили их краткую формулировку.

Отметим также важный момент. Запись равенства треугольников $\Delta ABC = \Delta KPM$ означает: $\angle A = \angle K, \angle B = \angle P, \angle C = \angle M$, $AB = KP$, $AC = KM$ и $BC = PM$, т. е. соответствующие вершины стоят на соответствующих местах.

Когда это удобно, будем использовать обозначения: в треугольнике ABC углы обозначать A, B и C,

a, b и c – стороны, противолежащие углам A, B и C,

h_a, h_b, h_c – высоты к сторонам a, b и c,

m_a, m_b, m_c – медианы к сторонам a, b и c.

Покажем, как важно точно помнить формулировки теорем.

Пусть треугольники ABC и $A'B'C'$ таковы, что $b'=b, c'=c$ и $\angle B'=\angle B$. Будут ли эти треугольники равны? Есть первый признак равенства «по двум сторонам и углу», но «углу между ними», а здесь какой угол? Нарисуем некоторый треугольник ABC (рис. 3) и отметим стороны и угол, о которых идёт речь: это не тот угол!

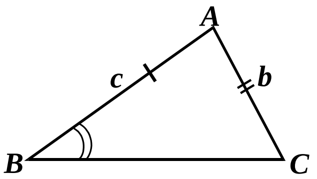

Рис. 3

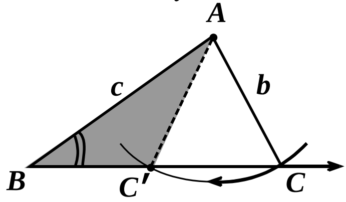

Рис. 4

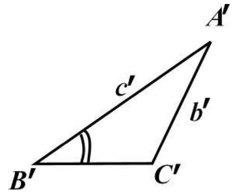

Рис. 5

Приведём пример треугольника $A'B'C'$ (рис. 5), который не равен треугольнику ABC $\left(B'C' \neq BC\right)$, хотя $c=c', b=b'$ и $\angle B=\angle B'$.

Рисунок 4 поясняет, как треугольник $A'B'C'$ получается из треугольника ABC.

Приведём ещё пример (рис. 6), который показывает, что слова «прилежащим к стороне» чрезвычайно важны в формулировке второго признака равенства треугольников.

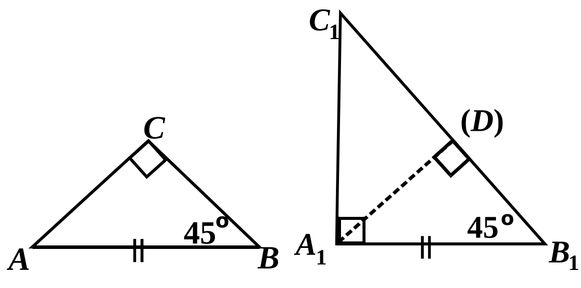

Рис. 6

Здесь $AB=A_1B_1$, $\angle C=\angle A_1=90^{\circ}$, $\angle B=\angle B_1=45^{\circ}$.

(Сторона одного треугольника равна стороне другого, два угла первого равны двум углам второго).

Но равные углы не прилежат к равным сторонам и $\Delta ABC \neq \Delta A_1B_1C_1$. Как легко видеть, треугольник ABC равен треугольнику A_1B_1D, который составляет часть треугольника $\Delta A_1B_1C_1$.

Пример 1. Треугольники ABC и $A'B'C'$ таковы, что равны их медианы, проведённые из вершин B и B' и равны углы, которые образуют эти медианы со сторонами a и c и со сторонами a' и c' соответственно. Доказать, что $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

△ При доказательстве мы рисуем треугольники, о которых идёт речь, в наиболее удобном положении (см. рис. 7), что возможно по аксиоме «перемещения треугольника», иначе называемой аксиомой «существования треугольника, равного данному».

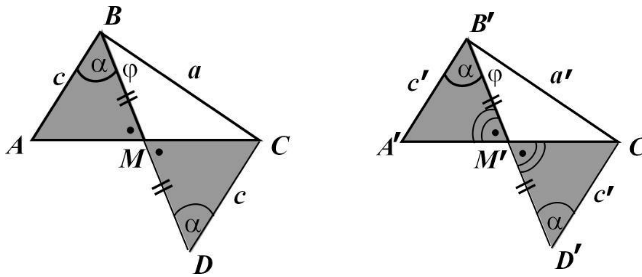

Рис. 7

Итак, $AM = CM, A'M' = C'M', \quad BM = B'M',$ равные углы ABM и $A'B'M'$ обозначим α, вторую пару равных углов обозначим φ.

1. В треугольнике ABC продолжим медиану BM за точку M и на прямой BM отложим отрезок $MD = BM$. Рассмотрим треугольники ABM и CDM.

Имеем: $AM = CM$ (т. к. BM – медиана),

$BM = DM$ (по построению),

$\angle AMB = \angle CMD$ (как вертикальные).

По первому признаку равенства треугольников $\Delta ABM = \Delta CDM$. В равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны $(AB = CD)$ и против равных сторон лежат равные углы (поэтому $\angle CDM = \alpha$).

Аналогичное построение осуществим с треугольником $A'B'C'$, получим, что $A'B' = C'D'$ и $\angle C'D'M' = \alpha$.

2. Теперь рассмотрим треугольники BCD и $B'C'D'$. Так как $BD = B'D'$ и прилежащие к отрезкам BD и $B'D'$ углы соответственно равны φ и α, то $\Delta BCD = \Delta B'C'D'$ по второму признаку равенства. Из этого равенства следует $CD = C'D'$ (т. е. $c = c'$) и $BC = B'C'$ (т. е. $a = a'$).

3. Вновь рассматриваем треугольники ABC и $A'B'C'$. Угол при вершине B равен углу при вершине B' и равны стороны, образующие этот угол. По первому признаку равенства $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$. ▲

Пример 2. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ во вне его построены равносторонние треугольники AKB и AMD (рис. 8). Доказать, что треугольник KCM также равносторонний.

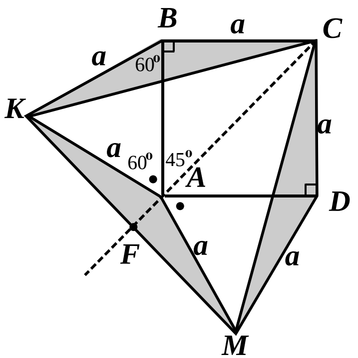

Рис. 8

△ Обозначим сторону квадрата a; очевидно, что стороны равносторонних треугольников тоже равны a. Отметим равные стороны в треугольниках KBC, CDM и KAM.

$\Delta KBC = \Delta CDM$ по первому признаку, т. к. $\angle KBC = \angle CDM = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.

Пусть прямая CA пересекает отрезок KM в точке F.

$\angle KAC = \angle MAC = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$.

Смежные с ними углы KAF и MAF равны $180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$, значит $\angle KAM = 150^\circ$, и $\Delta KAM = \Delta KBC$. Делаем вывод: $KC = CM = KM$, т. е. треугольник KCM – равносторонний.

(В решении использовано утверждение, что все углы равносторонних треугольников равны 60°). ▲

II. <u>Равнобедренный треугольник.</u>

В учебнике доказаны теоремы:

Т1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Т2. В равнобедренном треугольнике медиана, проведённая к основанию, является высотой и биссектрисой.

Т3. (Признак равнобедренного треугольника). Если два угла в треугольнике равны, то он равнобедренный.

Обратим внимание, что признаком фигуры A называется теорема с формулировкой: «если имеет место … , то это фигура A». Сформулируем следующие, часто применяемые в задачах, признаки равнобедренного треугольника:

а) если в треугольнике высота является медианой, то треугольник равнобедренный;

б) если в треугольнике высота является биссектрисой, то треугольник равнобедренный;

в) если в треугольнике медиана является биссектрисой, то треугольник равнобедренный.

Δ Доказательство признака а) вполне простое. Если $BD \perp AC$ и $AD = DC$ (рис. 9), то $\Delta ADB = \Delta CDB$ по двум сторонам (BD – общая, $AD = DC$) и углу между ними ($\angle ADB$ смежный с $\angle BDC = 90^\circ$, поэтому $\angle ADB = 90^\circ$).

Из равенства треугольников следует $AB = BC$ и треугольник ABC по определению равнобедренный.

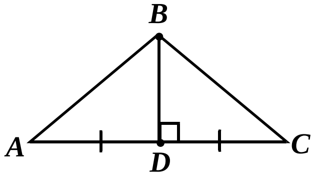

Рис. 9

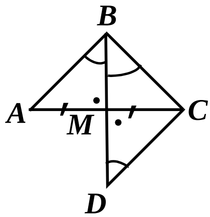

Рис. 10

Доказательство признака б) Столь же простое, докажите его самостоятельно.

Докажем признак в) Пусть в треугольнике ABC биссектриса BM является медианой: $AM = MC$ (рис. 10). На продолжении биссектрисы BM отложим отрезок MD, равный BM. Треугольники ABM и CDM равны по первому признаку: у них углы при вершине M равны, как вертикальные, и $AM = CM$, $BM = DM$. Из равенства треугольников следует

$$CD = AB \qquad (1)$$

и $\angle CDM = \angle ABM$. Но $\angle ABM = \angle CBM$, поэтому $\angle CDM = \angle CBM$, т. е. в треугольнике BCD углы при основании BD равны. По признаку Т3 этот треугольник равнобедренный: $BC = CD$. Отсюда и из (1) заключаем: $BC = AB$. Утверждение доказано. ▲

В следующем примере применяются признак параллельности прямых и две теоремы об углах треугольника (и следствия этих теорем):

Т. Сумма углов треугольника равна 180°.

Т. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

Пример 3. Точка K лежит на основании AC равнобедренного треугольника $ABC\left(AB = BC\right)$. Через точку K проведена прямая, пересекающая прямую AB и отрезок BC, при этом образовалось два равнобедренных треугольника (рис. 11). Найти углы треугольника ABC.

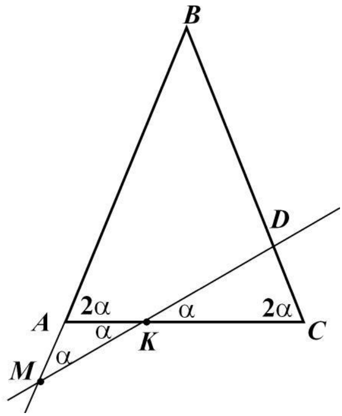

Рис. 11

△ Обозначим точки пересечения M и D.

1. Углы при основании равнобедренного треугольника равны и они острые, значит угол MAK – тупой.

2. В треугольнике может быть только один тупой угол, значит, если треугольник MAK равнобедренный, то равными могут быть только углы при вершинах M и K. Обозначим их α.

3. $\angle BAK = 2\alpha$ (как внешний угол треугольника MAK), $\angle BCA = 2\alpha$ (углы при основании равнобедренного треугольника равны) и $\angle DKC = \alpha$ ($\angle DKC = \angle AKM$ как вертикальные).

Расставим углы.

4. Треугольник KDC по условию равнобедренный. Возможны, вообще говоря, два случая: а) $\angle KDC = \alpha$ и б) $\angle KDC = 2\alpha$.

а) Если $\angle KDC = \alpha$, то накрест лежащие углы при секущей MD равны α; это по теореме означало бы параллельность прямых MB и CB, что противоречит их пересечению. Этот случай невозможен.

б) Если $\angle KDC = 2\alpha$, то по теореме о сумме углов треугольника (для треугольника KDC) $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ$, $\alpha = 36^\circ$. Находим углы треугольника ABC: $\angle A = \angle C = 2\alpha = 72^\circ$, $\angle B = 180^\circ - 2 \cdot \angle A = 36^\circ$. ▲

III. Для прямоугольных треугольников справедливы признаки равенства (их надо уметь доказывать):

1. по двум катетам;
2. по гипотенузе и катету;
3. по гипотенузе и острому углу;
4. по катету и острому углу.

Применяя признаки равенства прямоугольных треугольников, докажем ещё один признак равнобедренного треугольника:

Пример 4. Доказать, что если две высоты треугольника равны, то он равнобедренный.

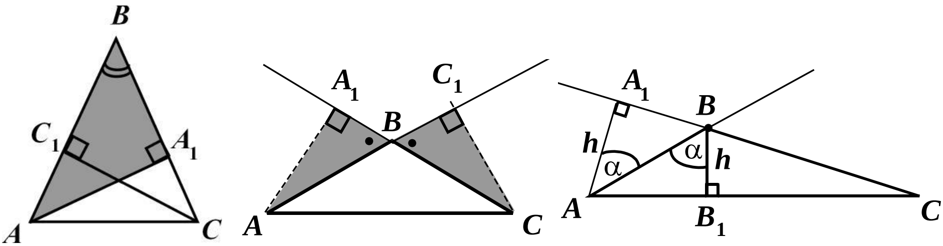

Рис. 12а **Рис. 12б** **Рис. 12в**

$\triangle$ Пусть высоты AA_1 и CC_1 треугольника ABC равны друг другу.

1. (Треугольник остроугольный. Обе высоты внутри треугольника, рис. 12а). Прямоугольные треугольники AA_1B и CC_1B равны по катету $\left(AA_1 = CC_1\right)$ и противолежащему острому углу (угол $B-$ общий). Тогда равны их гипотенузы $AB = CB$, а это и означает, что треугольник ABC равнобедренный.

2. (Треугольник тупоугольник, угол B тупой. Обе высоты вне треугольника, рис. 12б). Прямоугольные треугольники AA_1B и CC_1B имеют равные катеты $AA_1 = CC_1$ и равные противолежащие углы $\left(\angle ABA_1 = \angle CBC_1 \text{ как вертикальные}\right)$. Треугольники равны, равны их гипотенузы $AB = CB$. Треугольник $ABC-$ равнобедренный.

3. Случай равенства двух высот, одна из которых внутри треугольника, другая – вне треугольника, невозможен. Действительно, если $BB_1 = AA_1 = h$ (рис. 12в), то $\Delta AA_1B = \Delta BB_1A$ по гипотенузе (у них общая AB) и катету $AA_1 = BB_1$. Тогда $\angle BAA_1 = \angle ABB_1$ (обозначен α), т. е. накрест лежащие углы при секущей AB равны и прямые AA_1 и B_1B- параллельны, что неверно.

4. Если угол B – прямой, то высоты из вершин A и C совпадают с катетами AB и CB.

При равных высотах равны и катеты, треугольник ABC – равнобедренный. ▲

Пример 5. (Лемма о медиане прямоугольного треугольника). Доказать, что медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

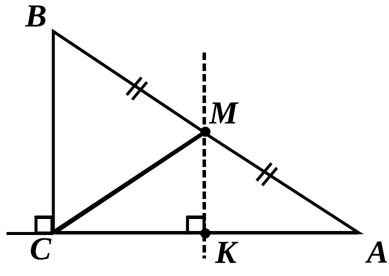

Рис. 13

△ Точка M – середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC (рис. 13). Проведём через точку M прямую $MK \perp AC$.

Из $BC \perp AC$ и $MK \perp AC$ следует $BC \parallel MK$.

Из параллельности прямых BC и MK и равенства отрезков BM и MA по теореме Фалеса следует $CK = KA$.

В прямоугольных треугольниках CMK и AMK катет MK общий и, как установили, равны катеты CK и AK. Эти треугольники равны, значит, равны и их гипотенузы, т. е. $CM = AM$, или $CM = \frac{1}{2}AB$. ▲

Дополнение. Для многих учащихся при решении задач возникает проблема: с чего начать? С рисунка! В геометрической задаче очень важен рисунок, он должен отвечать условиям задачи, быть наглядной формой их записи.

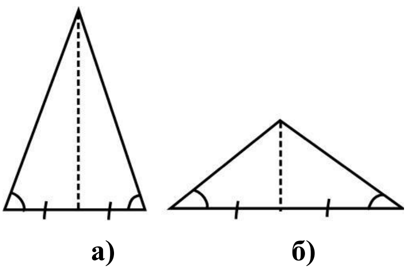

Рис. 14

Например, в задаче рассматривается равнобедренный треугольник. Его можно нарисовать по-разному (рис. 14а и 14б), поэтому сначала рисуют на черновике, от руки, и из других условий определяют вид треугольника.

Если сказано, что один отрезок в два раза длиннее другого, – отразите это на рисунке; если какие-то прямые параллельны – так и рисуйте, т. е. после таких рассмотрений делаете чёткий хороший рисунок, отвечающий условиям задачи.

Хороший рисунок – помощник в решении, особенно если на нём Вы отмечаете (если есть) равные углы, перпендикулярность отрезков, отношение длин и т. п. и ставите данные задачи. Посмотрите, например, на рис. 7, 8, 11 и подумайте, как рисунок помогает в решении.

Пример 6. В треугольнике ABC медиана BM перпендикулярна биссектрисе AD. Найти длину стороны $AB,$ если $AC = 6.$

$\triangle$ 1. Подумаем, как построить рисунок. Возьмём луч AK (рис. 15) и отложим от точки A какие-то равные углы (т. е. считаем, что биссектриса AD лежит на этом луче).

Выберем точку B, проведём через точку B прямую, перпендикулярно AK и отметим точку M. BM – медиана, поэтому отложим отрезок $MC = MA.$ Треугольник ABC – тот, что нужен: AD – биссектриса, BM – медиана, $AD \perp BM$.

2. Решение очевидно: $\Delta ABO = \Delta AMO$ (по катету и острому углу), значит $AB = AM$ и $AC = 2 \cdot AM = 2AB.$ Зная, что $AC = 6,$ находим $AB = 3.$ ▲

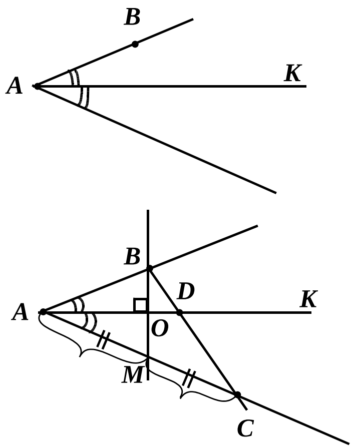

Рис. 15

§ 3 Задачи на построение

Рассмотрим задачи на построение с помощью циркуля и линейки – это задачи, в которых были очень сильны древнегреческие математики. Линейка считается без делений, даже если они на ней указаны. С помощью линейки можно проводить прямые линии, но нельзя измерять и откладывать отрезки, нельзя также, пользуясь её краями, проводить параллельные линии. Таким образом, линейку можно использовать для проведения произвольной прямой, прямой через данную точку, прямой через две данные точки.

С помощью циркуля можно провести произвольную окружность, можно провести окружность с данным центром и данного радиуса, также можно на данной прямой отложить отрезок, равный данному.

Описанные построения будем называть элементарными.

Простейшие задачи на построение с помощью циркуля и линейки описаны в учебнике, это:

построение 1: построение треугольника по трём сторонам, т. е. построение треугольника, стороны которого равны трём данным отрезкам a, b и c;

построение 2: построение угла, равного данному, от данной полупрямой в данную полуплоскость;

построение 3: построение биссектрисы данного угла;

построение 4: деление отрезка пополам (одновременное построение серединного перпендикуляра данного отрезка);

построение 5: построение перпендикуляра к данной прямой через данную точку.

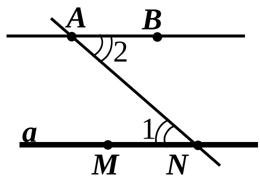

Рис. 16

Повторите указанные построения и запомните, как они выполняются.

Эти пять построений будем называть основными.

Рассмотрим еще одно построение, которое также отнесём к основным построениям.

Построение 6: построение прямой, проходящей через данную точку A параллельно данной прямой a.

Выберем на данной прямой a какие-нибудь две точки M и N (рис. 16) и проведём прямую AN. Используя построение 2, строим угол NAB, равный углу ANM (строим этот угол от полупрямой так, что точки B и M лежат в разных полуплоскостях). По построению $\angle 1 = \angle 2.$ Эти углы внутренние накрест лежащие, по теореме прямые AB и MN параллельны.

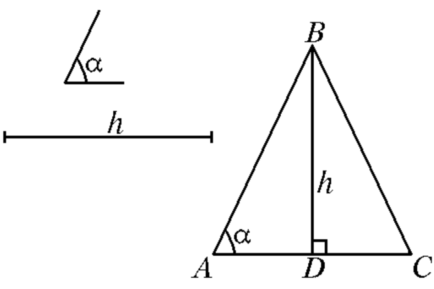

Рис. 17

С помощью основных построений 1 – 6 будем решать более сложные задачи.

Пример 5. Построить равнобедренный треугольник по углу при основании и высоте, опущенной на основание.

Δ Чтобы наметить план построения, предположим, что задача решена и построен равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$, в котором $\angle BAC = \alpha$ и высота BD равна заданному отрезку h (рис. 17).

В равнобедренном треугольнике высота BD, проведённая к основанию, является медианой, поэтому $AD = DC$. Если мы сможем построить прямоугольный треугольник ABD, то построение равнобедренного треугольника не составит труда.

Подумаем, можем ли мы построить прямоугольный треугольник ABD? Угол A, равный данному углу α, мы строить умеем. Осталось найти точку B, лежащую на одной из сторон угла на расстоянии h от другой стороны. Эту точку мы сможем получить как пересечение стороны угла и прямой, параллельной другой стороне и проходящей от неё на расстоянии h. Итак, выполним следующие построения (рис. 18):

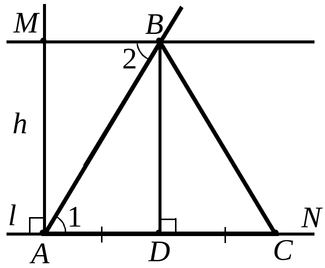

Рис. 18

Шаг 1. Проводим прямую l, выбираем точку A, от полупрямой AN откладываем угол 1, равный данному (построение 2).

Шаг 2. Через точку A проводим прямую, перпендикулярную прямой AN (построение 5), и на построенной прямой откладываем отрезок $AM = h$ (в той же полуплоскости, в которой построен угол).

Шаг 3. Через точку M проводим прямую, параллельную прямой AN (построение 6), точку её пересечения со стороной угла обозначим B.

Шаг 4. Из точки B опускаем перпендикуляр BD на прямую AN (построение 5) и откладываем $DC = DA$. Соединяем точки B и C.

Обратим внимание, <u>что каждый шаг построения содержит одно основное построение.</u>

Треугольник ABC – искомый, т. к. он удовлетворяет всем условиям задачи. Действительно, по построению $MB \| AD$, поэтому $\angle 1 = \angle 2;$ по построению $AM \perp AD$, $MB \| AD$, следовательно, $AM \perp MB.$ В прямоугольных треугольниках ABD и BAM общая гипотенуза AB и равные углы 1 и 2, эти треугольники равны, значит, $BD = AM$, т. е. $BD = h.$ Далее, по построению $DC = DA,$ поэтому $\Delta ABD = \Delta CBD$ (по двум катетам), откуда следует, что $\angle C = \angle A$ и $BC = AB$. Таким образом, треугольник ABC – равнобедренный, $\angle C = \angle A = \alpha$ и $BD = h$.

В равнобедренном треугольнике угол при основании острый, поэтому построение возможно, если заданный угол острый.

Построение единственно, т. к. точка B находится единственным образом. Задача имеет только одно решение. ▲

Из приведённого примера видно, что решение задачи на построение с помощью циркуля и линейки – это описание последовательности шагов с использованием основных построений, которая приводит к построению искомой фигуры. Чтобы найти эту последовательность шагов, т. е. составить план построения, обычно поступают так. Предполагают, что задача решена, делают примерный чертёж искомой фигуры, отмечают те отрезки и углы, которые известны из условия задачи, и стараются определить, к нахождению какой точки (прямой, угла) сводится решение. После этого стремятся найти такую зависимость между данными и искомыми величинами, которая позволяет найти (построить) искомую точку (прямую, угол), и составляют план построения. Составление плана – самая важная часть задачи, её обычно называют *анализом.*

Выполнив *анализ*, наметив план, описываем само *построение*. Оно должно содержать лишь основные построения и элементарные действия с линейкой и циркулем – это и гарантирует возможность построения с циркулем и линейкой.

Но решение ещё не закончено. Требуется провести *доказательство* того, что построенная фигура удовлетворяет всем условиям задачи и, кроме того, проделать *исследование*, т. е. выяснить, всегда ли (при любых ли данных) описанное построение возможно, нет ли частных случаев, в которых построение упрощается или делается невозможным.

Таким образом, решение задачи на построение состоит из 4 частей: анализ, построение, доказательство, исследование. Анализ опускается в простых задачах или в тех, решение которых уже известно.

Приведём ещё один пример решения задачи на построение.

Пример 6. Построить треугольник по данному периметру и двум углам.

По данному отрезку P и двум углам требуется построить треугольник, периметр которого равен P, и его два угла равны двум данным углам.

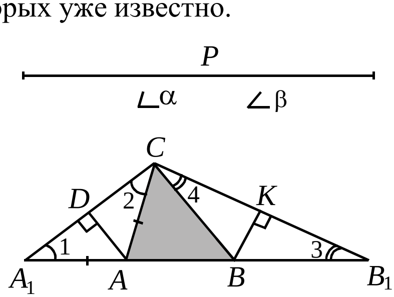

Рис. 19

Анализ. Предположим, что такой треугольник ABC построен (рис. 19),
$$AB+BC+CA=P,\ \angle A=\alpha,\ \angle B=\beta.$$

На прямой AB отложим отрезки $AA_1=AC$ и $BB_1=BC$, тогда $A_1B_1=P$.

Треугольник A_1AC равнобедренный, $\angle 1=\angle 2$, а по теореме о внешнем угле треугольника $\angle BAC=\angle 1+\angle 2$. Таким образом $\angle 1=\angle 2=\alpha/2$.

Аналогично $\angle 3=\angle 4=\beta/2$. В треугольнике A_1B_1C известны два угла 1 и 3 и сторона между ними $A_1B_1=P$. Такой треугольник можно построить, тогда точки A и B найдутся, как точки пересечения серединных перпендикуляров отрезков A_1C и B_1C с прямой A_1B_1.

Построение.

Шаг 1. Делим данные углы α и β пополам (построение 3).

Шаг 2. Проводим произвольную прямую и на ней откладываем отрезок A_1B_1, равный данному отрезку P. От полупрямой A_1B_1 откладываем угол 1, равный $\alpha/2$, а от полупрямой B_1A_1 в ту же полуплоскость откладываем угол 3, равный $\beta/2$ (построение 2), точку пересечения сторон этих углов обозначим C.

Шаг 3. Строим серединные перпендикуляры отрезков A_1C и B_1C (построение 4), точки их пересечения с прямой A_1B_1 обозначим A и B. Соединяем точки A и B с точкой C. Треугольник $ABC-$ искомый.

Доказательство. По построению $A_1D=DC,\ AD\perp A_1C$, следовательно, $\Delta A_1AD=\Delta CAD$ (по первому признаку) и $AA_1=AC$. Аналогично $KB\perp B_1C,\ B_1K=KC$, поэтому $BB_1=BC$ и $AC+AB+BC=$ $=AA_1+AB+BB_1=P$. Кроме того, $\angle CAB=\angle 1+\angle 2=\alpha$ и $\angle ABC=\angle 3+\angle 4=\beta.$

Исследование. Построение возможно всегда, если только сумма двух углов меньше 180° (сумма двух углов треугольника всегда меньше 180°). Решение единственно, т. к. точка C, а затем точки A и B определяются единственным образом.

Замечание. В этой задаче была задана сумма сторон треугольника, и мы как бы «развернули» стороны треугольника, пока они не легли на одну прямую – получили отрезок A_1B_1, равный данному. Этот приём называют *методом спрямления* и обычно применяют в задачах, в которых задана сумма (либо разность) сторон треугольника.

§ 4. Задачи для досуга (этот пункт дополнительный)

1. Как измерить с помощью одной мерной линейки, произведя одно измерение, диагональ кирпича (кирпич имеет форму прямоугольного параллелепипеда, изображенного на рис. 20, его диагональ – это отрезок, соединяющий противоположные вершины (например, A и B)). Дайте способ простой, практичный, пригодный для мастерской, стройки, без применения вычислений по теореме Пифагора.

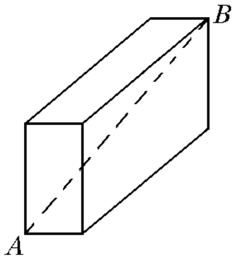

Рис. 20

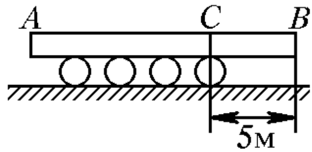

Рис. 21

2. Тяжелая балка AB лежит на брёвнах (рис. 21), её правый конец отстоит от оси последнего бревна на 5м ($BC = 5$ м). На сколько продвинется вперед передняя часть балки (точка A), если точка B достигнет оси последнего бревна? Считать брёвна одинаковыми и круглыми; катятся брёвна без скольжения.

3. Нетрудно показать, что у правильно пятиугольной звезды сумма углов равна $180°$. Показать, что такая же сумма углов будет у произвольной пятиугольной звезды (рис. 22).

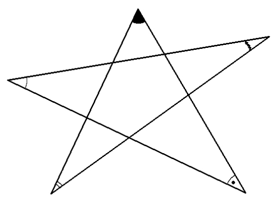

Рис. 22

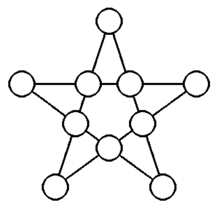

Рис. 23

4. Во времена частных междоусобных войн один правитель захотел построить крепость-замок из 10 башен, соединённых между собой стенами, причём стены должны тянуться прямыми линиями с четырьмя башнями в каждой из них. Приглашённый им известный строитель представил ему план крепости (см. рис. 23), но правитель нашёл его совершенно неудовлетворительным: при таком расположении к любой из десяти башен можно подойти извне. Правителю же хотелось, чтобы по крайней мере одна башня (а ещё лучше – две) была бы со всех сторон защищена стеной от вторжения извне. Долго строитель ломал голову над такой задачей, но решил её и с одной безопасной башней, и с двумя безопасными башнями.

Попробуйте и вы найти решение.

5. Можно ли покрыть костяшками домино (каждая костяшка – две клетки) доску 8×8 клеток с двумя вырезанными противоположными клетками (рис. 24)?

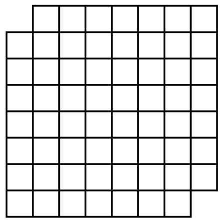

Рис. 24

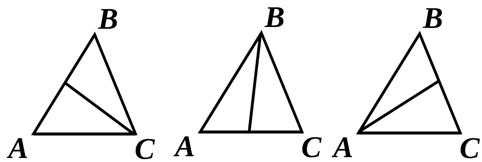

Рис. 25

6. Три одинаковых треугольника разрезали по медианам (рис. 25). Сложите из полученных 6 кусков один треугольник.

7. На рис. 26 изображена фигура, составленная из пяти квадратов. Требуется провести два разреза по прямым линиям так, чтобы из полученных частей можно было бы составить квадрат.

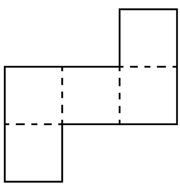

Рис. 26

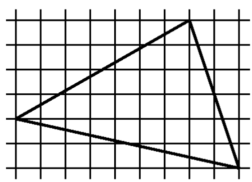

Рис. 27

8. Найти площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге (см. рис. 27), считать площадь каждой клетки равной 1.

9. На окружности расположено 2000 чёрных точек и одна белая точка. Рассматриваются всевозможные выпуклые многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше: тех, у которых все вершины чёрные, или тех, у которых одна вершина белая?

10. Можно ли, начав движение в какой-то точке контура обойти все его звенья, проходя по каждому ровно 1 раз, и вернуться в исходную точку. (контуры 1– 6 на рис. 28)

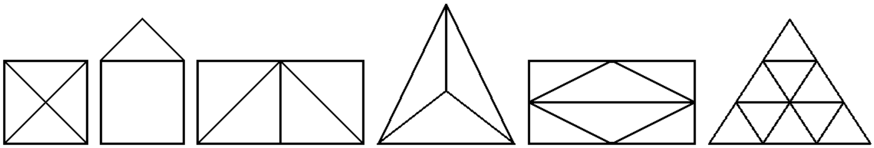

Рис. 28

11. Какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый n – угольник?

Задачи и вопросы для самостоятельного решения

В контрольных вопросах и задачах проверяются Ваши знания основного курса и знакомство с материалом нашего задания.

1. Задачи на построение желательно оформлять так, как это сделано в §2 Задания. Каждый шаг решения содержит одно основное построение, которое должно быть указано.

2. Контрольные вопросы и задачи могут быть не только по темам, повторенным в этом Задании (повторить весь учебник невозможно), но и по материалу, изученному Вами в школе. При ответе на некоторые вопросы придётся открыть учебник.

3. Ответы на контрольные вопросы надо давать обоснованные. Приведём примеры.

Вопрос 1. Точки K и L делят диагональ AC параллелограмма $ABCD$ на три равные части: $AK = KL = LC$ (рис. 29). Верно ли, что прямые BK и LD параллельны?

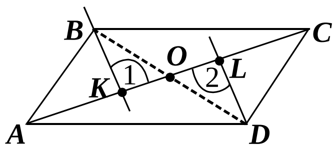

Рис. 29

Ответ: Да, верно. Докажем это.

а) Проведём диагональ BD. По теореме диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам:

$AO = OC$ и $BO = OD.$

б) Из $AO = OC$ и $AK = CL$ следует $KO = OL.$

в) $\Delta BOK = \Delta DOL,$ так как $KO = OL, BO = OD$ и $\angle BOK = \angle DOL$ (как вертикальные).

Из равенства треугольников следует $\angle 1 = \angle 2$. Накрест лежащие углы при секущей AC равны, следовательно, $BK \parallel LD$.

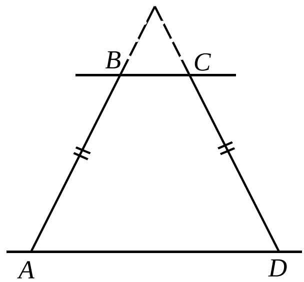

Рис. 30

Вопрос 2. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны друг другу, а стороны AD и BC параллельны. Является ли четырёхугольник $ABCD$ параллелограммом?

Ответ: Нет, например, четырёхугольник $ABCD$ на рисунке 30 удовлетворяет этим условиям, но противоположные стороны AB и CD не параллельны (этот четырёхугольник – равнобокая трапеция).

Контрольные вопросы

1(5). а) Что означает равенство $\Delta ABC = \Delta KDF$?

б) Точка M лежит на стороне AC треугольника ABC. Известно, что $\Delta AMB = \Delta BMC$. Что можно сказать о положении точки M и сторонах треугольника ABC?

в) Верно ли, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle C = \angle C_1$?

2(10). Какие из следующих утверждений верные, какие нет, и почему?

а) В равнобедренном треугольнике биссектрисы углов при основании равны.

б) Если стороны угла с вершиной S параллельны сторонам угла с вершиной K, то эти углы равны.

в) Два четырёхугольника равны, если у них все соответствующие стороны равны.

г) Если две окружности радиусов R и r касаются друг друга, то расстояние между их центрами равно $R + r$.

д) Точка пересечения двух биссектрис треугольника есть центр вписанной в него окружности.

3(3). Стороны треугольника a, b и c. Как доказать, что медиана m_c к стороне c удовлетворяет неравенству $\frac{|a-b|}{2} < m_c < \frac{a+b}{2}$?

4(3). а) Докажите теорему о внешнем угле треугольника.

б) В треугольнике ABC угол C – прямой, $AD = DF = FC = CB$ (рис. 1). Чему равен угол α?

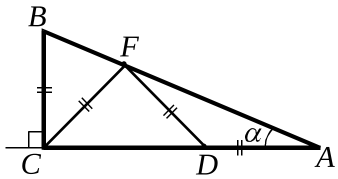

Рис. 1

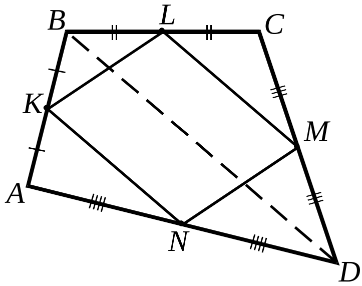

Рис. 2

5(4). а) Дайте определение средней линии треугольника и сформулируйте теорему о средней линии.

б) Докажите, что четырёхугольник с вершинами в серединах сторон четырёхугольника (рис. 2) является параллелограммом.
(Этот параллелограмм называется четырёхугольником Вариньона).

В каком случае четырёхугольник Вариньона – ромб?

6(3). а) В чём состоит метод доказательства «от противного».

б) Докажите методом от противного, что не существует треугольника со сторонами a, b и $c,$ для которых выполняется $3a = 6b = 7c.$

7(3). а) Что называется геометрическим местом точек на плоскости?

б) Найти геометрическое место середин хорд данной окружности, проходящих через точку A этой окружности.

8(4). Что называется «обратной теоремой»? Установите, что справедлива теорема «Биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию». Сформулируйте обратную теорему. Верна ли она?

Задачи

1(4). Биссектриса угла B параллелограмм $ABCD$ пересекает сторону AD в точке K, а продолжение стороны CD в точке M, при этом $AK=4$ и $DM=7$. Найти стороны параллелограмма.

2(5). Точка M – середина стороны AC треугольника ABC, $\angle BAC=80^\circ$, $\angle BCA=30^\circ$. В треугольнике проведены высоты AA_1 и CC_1. Найти величину угла A_1MC_1.

3(5). Стороны AB и BC треугольника ABC соответственно равны 15 и 20, высота BD равна 12. Найти длину стороны AC.

4(5). Дан прямоугольник $ABCD$. Через середину диагонали AC проведена прямая, перпендикулярная AC, она пересекает сторону AB в точке M и сторону CD в точке N. Известно, что $MN=CN=6$. Найти длину стороны CD.

5(6). Точка M – середина стороны AC треугольника ABC. На сторонах AB и BC $(AB \neq BC)$ во вне треугольника построены квадраты $ADFB$ и $CKLB$, точки O_1 и O_2 – их центры.

а) Докажите, что $O_1M=O_2M$ (см. решение примера 2 Задания. Найдите равные треугольники).

б) Найти величину угла O_1MO_2.

Задачи на построение с циркулем и линейкой

6(4). Даны три отрезка a, b и m. построить треугольник со сторонами a и b и медианой m к третьей стороне.

7(5). Дан отрезок m и острый угол α. Построить прямоугольный треугольник, в котором разность гипотенузы и катета равна m, а угол между этим катетом и гипотенузой равен α.

8(5). Дан угол и точка M внутри угла, не лежащая на биссектрисе угла.

а) провести через точку M прямую так, чтобы её отрезок внутри угла делился в точке M пополам.

б) провести через точку M прямую так, чтобы она отрезала на сторонах угла равные отрезки.

9(5). Постройте треугольник по радиусу R описанной окружности, стороне a и высота h к другой стороне.