Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Заочная физико-техническая школа

МАТЕМАТИКА

Системы уравнений

Задание №3 для 8-х классов

(2015 – 2016 учебный год)

Долгопрудный, 2015

Составитель: Т.Х. Яковлева, старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ;
М. А. Лунина, доцент кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №3 для 8-х классов (2015 – 2016 учебный год), 2015, 19 с.

Дата отправления заданий по физике и математике –15 января 2016 г.

Составители:
Яковлева Тамара Харитоновна,
Лунина Мария Александровна.
Подписано 02.11.15. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,19.
Уч.-изд. л. 1,05. Тираж 550. Заказ №21-з.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(государственного университета)
ООО «Печатный салон ШАНС»

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141700.
ЗФТШ, тел./факс (495) 408-51-45 – **заочное отделение,**
тел./факс (498) 744-63-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (498) 744-65-83 – **очное отделение.**

e-mail: zftsh@mail.mipt.ru

Наш сайт: www.school.mipt.ru

§ 1. Линейные уравнения с двумя переменными

В первом задании мы рассмотрели линейные уравнения с одной переменной. Например, уравнения $2x+5=0,\ 3x+(8x-1)+9=0$ являются линейными уравнениями с переменной x. Уравнение, содержащее переменные x и y, называется уравнением с двумя переменными. Например, уравнения $2x-3y=5,\ \ x^2+xy-y^2=7$ являются уравнениями с двумя переменными.

Уравнение вида $ax+by=c$ называется линейным уравнением с двумя переменными, где x и $y-$переменные, $a, b, c-$некоторые числа.

Например, уравнения $2x+y=3,\ x-y=0$ являются линейными уравнениями с двумя переменными.

Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство.

Например, $x=3,\ y=4$ является решением уравнения $2x+3y=18$, будем эту пару чисел записывать так $(3;4)$. Очевидно, что пара чисел $(4;3)$ не является решением уравнения, т. к. $2\cdot 4+3\cdot 3=17\neq 18.$ При нахождении решений с двумя переменными на первом месте в паре чисел пишем значение для переменной x, а на втором месте – значение переменной y.

Если каждое решение одного уравнения является решением второго уравнения и обратно, то данные уравнения называются равносильными. Например, решения уравнений $2x+y=3$ и $4x+2y=6$ совпадают, следовательно, эти уравнения равносильные.

Справедливы следующие правила при решении уравнений с двумя переменными:

1) если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному;

2) если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.

Пример 1. Укажите три различных решения для уравнения

$$3x+y-2=0.$$

Δ Если $x=0$, то $y=2$; если $y=0$, то $x=\frac{2}{3}$; если $x=1$, то $y=-1$.

Таким образом, пары чисел $(0;2),\left(\frac{2}{3};0\right),(1;-1)$ являются решениями данного уравнения. Заметим, что данное уравнение имеет бесконечно много решений. Для заданного значения x значение $y=2-3x$, т. е. любая пара чисел $(x;\ 2-3x)$, где $x-$ любое число, является решением уравнения. ▲

Рассмотрим координатную плоскость Oxy и отметим на ней все точки $(x;y)$, для которых пара чисел x и y является решениями уравнения. Например, рассмотрим уравнение $y=2$. Этому уравнению удовлетворяют все пары чисел $(x;\ 2)$. Точки, для которых $x-$ любое число, а $y=2$, лежат на прямой $y=2$. Эта прямая параллельна оси x и проходит через точку $(0;\ 2)$ (см. рис. 1).

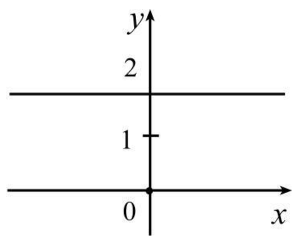

Рис. 1

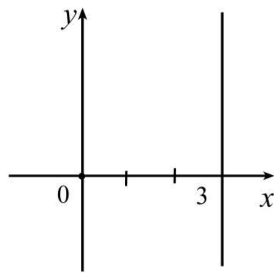

Рис. 2

Рассмотрим уравнение $x=3$. Каждая пара чисел, являющаяся решением данного уравнения, изображается точкой с координатами x и y на координатной плоскости Oxy. Решениями данного уравнения являются пары чисел $(3;\ y)$. Точки с координатами $x=3$ и y лежат на прямой $x=3$, эта прямая параллельна оси Oy и проходит через точку $(3;\ 0)$ (см. рис. 2).

Графиком уравнения с двумя переменными называется множество всех точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями данного уравнения.

На рис. 1 графиком уравнения является прямая $y=2$, на рис. 2 графиком уравнения является прямая $x=3$.

Рассмотрим теперь уравнение $2x+3y-1=0$. Выразим переменную y через x, получаем $y=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}x$, это уравнение задаёт линейную функцию, и нам известно, что её графиком является прямая. Чтобы построить эту прямую, достаточно рассмотреть две точки, координаты которых удовлетворяют уравнению, а затем через эти две точки провести прямую. При $x=0$ $y=\frac{1}{3}$ и при $x=\frac{1}{2}$ $y=0$. График данного уравнения приведён на рис. 3.

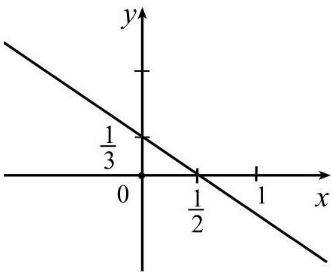

Рис. 3

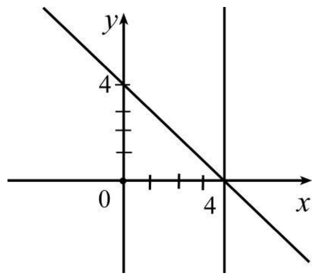

Рис. 4

Рассмотрим уравнение $(x-4)(x+y-4)=0$. Произведение двух скобок равно нулю, каждая скобка может равняться нулю. Наше уравнение распадётся на два уравнения: $x=4$ и $x+y-4=0$. Графиком первого уравнения является прямая, параллельная оси Oy и проходящая через точку $(4; 0)$. Графиком второго уравнения является график линейной функции $y=4-x$, эта прямая проходит через точки $(4; 0)$ и $(0; 4)$. График данного уравнения приведён на рис. 4.

Пример 2. Постройте график уравнения $|x|+|y|=1.$

Δ Этот пример можно решать двумя способами. Пусть $x \geq 0$ и $y \geq 0,$ точки с такими координатами лежат в первой четверти. Получаем уравнение $x+y=1$, так как $|x|=x$ и $|y|=y$. Графиком данного уравнения является прямая, проходящая через точки $A(1;0)$ и $B(0;1).$ Графику исходного уравнения принадлежат точки полученной прямой, лежащие в первой четверти, т. е. графику принадлежат точки отрезка AB, где $A(1;0)$ и $B(0;1).$

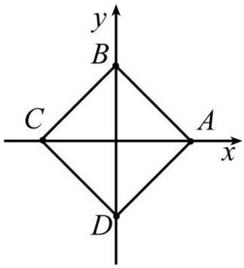

Рис. 5

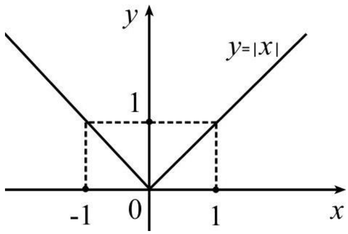

Рис. 6

Пусть теперь $x \leq 0$ и $y \geq 0,$ тогда получаем уравнение $-x+y=1$, рассматриваем точки полученной прямой, лежащие во второй четверти. Это будет отрезок $BC,$ где $C(-1;0)$. При $y \geq 0$, $y \leq 0$ получим отрезок CD, где $D(0;-1),$ и при $x \geq 0,$ $y \leq 0$ получим отрезок DA. Таким образом, график данного уравнения состоит из точек квадрата $ABCD.$

Этот пример можно решать другим способом. Пусть $y \geq 0,$ тогда наше уравнение эквивалентно уравнению $y=1-|x|$. В первом задании мы строили график функции $y=|x|$ (см. рис. 6). График функции

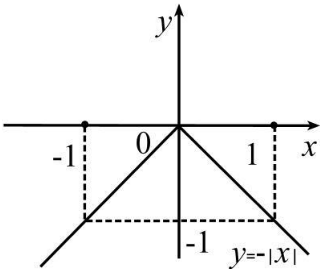

Рис. 7

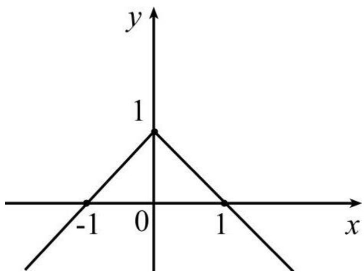

Рис. 8

$y=-|x|$ получается зеркальным отражением относительно оси Ox графика функции $y=|x|$ (см. рис. 7). График функции $y=1-|x|$ получается из графика функции $y=-|x|$ сдвигом вдоль оси Oy на единицу вверх (см. рис. 8). У полученного графика рассматриваем только точки для которых $y \geq 0$. Получим ломаную ABC с рис. 5.

Далее рассматриваем $y \leq 0$, получим, что графиком уравнения при $y \leq 0$ является ломаная CDA с рис. 5. В итоге получим квадрат $ABCD$ с рис. 5. ▲

Пример 3. Найдите все решения уравнения $xy=6$, для которых x и y являются натуральными числами.

Δ Очевидно, что натуральные числа x и y являются делителями числа 6. Поэтому x и y могут принимать значения 1; 2; 3; 6. Следовательно, искомыми решениями являются числа $(1;6),(2;3),(3;2)$, $(6;1)$. ▲

Пример 4. Найти все решения уравнения $x^2+4x=y^2+2y+8$, для которых значения x и y являются целыми числами.

Δ Обычно такие примеры формулируют так: найти все решения данного уравнения в целых числах.

Преобразуем данное уравнение: $x^2+4x+4-4=y^2+2y+1+7$, $(x+2)^2=(y+1)^2+11$, $(x+2)^2-(y+1)^2=11$, $(x+2-y-1)\cdot(x+2+y+1)=11$. Если x и y целые числа, то выражения, стоящие в скобках, являются целыми числами. А это могут быть числа ± 1 и ± 11. Решаем 4 системы уравнений:

$$\begin{cases} x+2-y-1=1, \\ x+2+y+1=11; \end{cases} \quad \begin{cases} x+2-y-1=11, \\ x+2+y+1=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2-y-1=-1, \\ x+2+y+1=-11; \end{cases} \quad \begin{cases} x+2-y-1=-11, \\ x+2+y+1=-1. \end{cases}$$

Решая эти системы, получаем 4 решения: $(4;4),(4;-6),(-8;-6)$, $(-8;4)$.

§ 2. Системы линейных уравнений

Решение многих задач сводится к решению систем линейных уравнений.

Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая каждое уравнение в верное числовое равенство.

Например, пара чисел $(2;3)$ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y=13, \\ x+5y=17, \end{cases}$$

а пара чисел $(1;1)$ не является решением системы, т. к. эта пара не является решением каждого из уравнений системы.

Пример 1. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} 2y+3x=8, \\ y-x=-1? \end{cases}$$

Δ Запишем первое уравнение системы в виде $y=-\frac{3}{2}x+4$, а второе уравнение системы в виде $y=x-1$. Мы получили две линейные функции, графиками которых являются прямые с разными угловыми коэффициентами. Вам известно, что такие прямые пересекаются в одной точке. Чтобы найти координаты точки пересечения прямых, приравняем значения для y. Получаем $-\frac{3}{2}x+4=x-1,$ $-\frac{3}{2}x-x=-4-1,$ $-\frac{5}{2}x=-5;$ $x=2,$ тогда $y=2-1=1.$ Таким образом, система имеет единственное решение $(2;1)$. ▲

Пример 2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+y=5, \\ 4x+2y=10. \end{cases}$$

Δ Из первого уравнения следует, что $y=5-2x$, а из второго уравнения получим $y=5-2x$. Графики этих уравнений совпадают. Уравнению удовлетворяет любая пара чисел $(x,\ 5-2x)$, где x любое число, а $y=5-2x.$ Система уравнений имеет бесконечно много решений. ▲

Пример 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=7, \\ 2x+2y=10. \end{cases}$$

Δ Запишем первое уравнение системы в виде $y=-x+7$ и второе уравнение системы в виде $y=-x+5$. Графиками этих уравнений являются две параллельные прямые, которые не пересекаются, т. к. $-x+7=-x+5,\ x\cdot 0=-2,$ а это уравнение не имеет решений. ▲

При решении систем применяют метод подстановки, метод сложения и метод введения новых переменных.

Покажем на конкретном примере, как применяется метод подстановки.

Пример 4. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x+y=4, \\ 5x+3y=11. \end{cases}$

Δ Из первого уравнения выражаем $y=4-2x$, и это значение для y подставляем во второе уравнение системы, получаем: $5x+3(4-2x)=11,\quad 5x+12-6x=11,\quad -x=-1,\quad x=1.$ Подставляем это значение x в выражение для y, получаем: $y=4-2=2.$ Пара чисел $(1;2)$ является единственным решением системы уравнений. ▲

Теперь приведём пример, где применяется метод сложения.

Пример 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x-2y=5, \\ 2x+2y=10. \end{cases}$$

Δ В этих уравнениях коэффициенты при переменной y отличаются знаком. Сложив уравнения системы, получаем

$$3x-2y+2x+2y=5+10,\quad 5x=15,\quad x=3.$$

Подставляем найденное значение x, например, в первое уравнение системы, получаем: $3\cdot 3-2y=5,\quad -2y=-4,\quad y=2.$ Система имеет единственное решение $(3;2).$ ▲

Пример 6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x+3y=11, \\ 3x+7y=13. \end{cases}$$

Δ Сделаем коэффициенты при x обоих уравнений противоположными числами, для этого умножим обе части первого уравнения на 3 и обе части второго уравнения на (-4), получим систему

$$\begin{cases} 12x+9y=33, \\ -12x-28y=-52. \end{cases}$$

Сложим уравнения системы: $12x+9y-12x-28y=33-52$,

$$-19y=-19, \quad y=1.$$

Подставляем это значение для y в первое уравнение системы, получаем: $12x+9=33, \quad 12x=24, \quad x=2$. Пара чисел $(2;1)$ является единственным решением системы. ▲

Покажем на конкретном примере, как применяется метод введения новых переменных.

Пример 7. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{2x-y}+\dfrac{9}{3x+y}=2, \\ \dfrac{7}{2x-y}-\dfrac{18}{3x+y}=5. \end{cases}$

Δ Введём новые переменные: $u=\dfrac{1}{2x-y}, v=\dfrac{1}{3x+y}$. Для переменных u и v получим систему уравнений

$$\begin{cases} u+9v=2, \\ 7u-18v=5. \end{cases}$$

Умножим обе части первого уравнения на 2, получим систему

$$\begin{cases} 2u+18v=4, \\ 7u-18v=5. \end{cases}$$

Сложим уравнения системы, получим $9u=9, u=1$. Из первого уравнения при $u=1$ следует, что $v=\dfrac{1}{9}$.

Из условия $\dfrac{1}{2x-y}=1$ следует, что $2x-y=1$, а из условия $\dfrac{1}{3x+y}=\dfrac{1}{9}$ следует, что $3x+y=9$. Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 3x + y = 9. \end{cases}$$

Сложим уравнения системы: $5x = 10,\ \ x = 2,$ из первого уравнения получаем $4 - y = 1,\ y = 3.$

Ответ: $(2; 3).$ ▲

Пример 8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 10x - 5y - 3z = -9, \\ 6x + 4y - 5z = -1, \\ 3x - 4y - 6z = -23. \end{cases}$$

Δ Уравняем коэффициенты при x в первом и втором уравнениях, для этого умножим обе части первого уравнения на 3, а второго уравнения – на 5, получаем:

$$\begin{cases} 30x - 15y - 9z = -27, \\ 30x + 20y - 25z = -5. \end{cases}$$

Вычитаем из второго уравнения полученной системы первое уравнение, получаем: $35y - 16z = 22.$

Из второго уравнения исходной системы вычитаем третье уравнение, умноженное на 2, получаем: $4y + 8y - 5z + 12z = -1 + 46,$ $12y + 7z = 45.$

Теперь решаем новую систему уравнений:

$$\begin{cases} 35y - 16z = 22, \\ \ \ 12y + 7z = 45. \end{cases}$$

К первому уравнению новой системы, умноженному на 7, прибавляем второе уравнение, умноженное на 16, получаем:

$$35 \cdot 7y + 12 \cdot 16y = 22 \cdot 7 + 45 \cdot 16,$$

$245y + 192y = 154 + 720,\ \ 437y = 874,\ \ y = 2.$ Подставляем $y = 2$ в уравнение $12y + 7z = 45$, получаем: $24 + 7z = 45,\ 7z = 21,\ z = 3.$

Теперь подставляем $y = 2,\ \ z = 3$ в первое уравнение исходной системы, получаем: $10x - 5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -9,\ 10x - 10 - 9 = -9,\ 10x = 10,\ \ x = 1.$

Ответ: $(1; 2; 3).$ ▲

§ 3. Решение систем с параметром и с модулями

Рассмотрим систему уравнений $\begin{cases} ax+4y=2a, \\ x+ay=a. \end{cases}$

В этой системе, на самом деле, три переменные, а именно: $a,\ x,\ y.$ Неизвестными считают x и $y,$ a называют параметром. Требуется найти решения (x, y) данной системы при каждом значении параметра $a.$

Покажем, как решают такие системы. Выразим переменную x из второго уравнения системы: $x=a-ay.$ Подставляем это значение для x в первое уравнение системы, получаем:

$$a(a-ay)+4y=2a,$$

$$(2-a)(2+a)y=a(2-a).$$

Если $a=2,$ то получаем уравнение $0\cdot y=0$. Этому уравнению удовлетворяет любое число $y,$ и тогда $x=2-2y$, т. е. при $a=2$ пара чисел $(2-2y;\, y)$ является решением системы. Так как y может быть любым числом, то система при $a=2$ имеет бесконечно много решений.

Если $a=-2,$ то получаем уравнение $0\cdot y=-8$. Это уравнение не имеет ни одного решения.

Если теперь $a\neq\pm2,$ то $y=\dfrac{a(2-a)}{(2-a)(2+a)}=\dfrac{a}{2+a},$

$$x=a-ay=a-\frac{a^2}{2+a}=\frac{2a}{2+a}.$$

Ответ: При $a=2$ система имеет бесконечно много решений вида $(2-2y;\, y),$ где $y-$ любое число;

при $a=-2$ система не имеет решений;

при $a\neq\pm2,$ система имеет единственное решение $\left(\dfrac{2a}{2+a};\ \dfrac{a}{2+a}\right).$ ▲

Мы решили эту систему и установили, при каких значениях параметра a система имеет одно решение, когда имеет бесконечно много решений и при каких значениях параметра a она не имеет решений.

Пример 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2|x|-3|y-1|=3, \\ 3x-2y=5. \end{cases}$$

Δ Из второго уравнения системы выражаем x через y, получаем $x=\dfrac{2y+5}{3}$, подставляем это значение для x в первое уравнение системы, получаем:

$$\frac{2}{3}|2y+5|-3|y-1|=3; \quad \frac{4}{3}\left|y+\frac{5}{2}\right|-3|y-1|=3.$$

Выражение $y+\dfrac{5}{2}=0$ при $y=-\dfrac{5}{2}$. Если $y>-\dfrac{5}{2}$, то $\left|y+\dfrac{5}{2}\right|=y+\dfrac{5}{2}$; если $y<-\dfrac{5}{2}$, то $\left|y+\dfrac{5}{2}\right|=-y-\dfrac{5}{2}$.

Выражение $y-1=0$, если $y=1$. Если $y>1$, то $|y-1|=y-1$, а если $y<1$, то $|y-1|=1-y$.

Если $y\geq 1$, то $|y-1|=y-1$ и $\left|y+\dfrac{5}{2}\right|=y+\dfrac{5}{2}$, получаем уравнение: $\dfrac{4}{3}\left(y+\dfrac{5}{2}\right)-3(y-1)=3$, $\dfrac{4}{3}y+\dfrac{10}{3}-3y+3=3$, $-\dfrac{5}{3}y=-\dfrac{10}{3}$, $y=2$. Тогда $x=\dfrac{1}{3}(2\cdot 2+5)=3$. Число $2>1$, так что пара $(3;2)$ является решением системы.

Пусть теперь $-\dfrac{5}{2}\leq y<1$, тогда $|y-1|=1-y$; $\left|y+\dfrac{5}{2}\right|=y+\dfrac{5}{2}$. Для нахождения y получаем уравнение $\dfrac{4}{3}\left(y+\dfrac{5}{2}\right)+3y-3=3$,

$$\frac{4}{3}y+\frac{10}{3}+3y=6, \qquad \frac{13}{3}y=\frac{8}{3}, \qquad y=\frac{8}{13};$$

$$x=\frac{1}{3}(2y+5)=\frac{1}{3}\left(\frac{16}{13}+5\right)=\frac{27}{13}.$$

Число $\frac{8}{13}$ больше $\left(-\frac{5}{2}\right)$, но меньше, чем 1, поэтому пара чисел $\left(\frac{27}{13};\frac{8}{13}\right)$ является решением системы.

Если $y<-\frac{5}{2}$, то получаем уравнение: $-\frac{4}{3}\left(y+\frac{5}{2}\right)+3y-3=3,$ $-\frac{4}{3}y-\frac{10}{3}+3y=6,$ $\frac{5}{3}y=\frac{28}{3},$ $y=\frac{28}{5}.$ Это значение больше, чем $\left(-\frac{5}{2}\right)$, поэтому решений нет.

Таким образом, система имеет два решения $(3;2)$ и $\left(\frac{27}{13};\frac{8}{13}\right)$. ▲

§ 4. Решение задач с помощью систем уравнений

Пример 1. Путь от города до посёлка автомобиль проезжает за 2,5 часа. Если он увеличит скорость на 20 км/ч, то за 2 часа он проедет путь на 15 км больший, чем расстояние от города до посёлка. Найдите расстояние от города до посёлка.

Δ Обозначим через S расстояние между городом и посёлком и через V скорость автомобиля. Тогда для нахождения S получаем систему из двух уравнений

$$\begin{cases}2{,}5V=S,\\(V+20)2=S+15.\end{cases}$$

Из первого уравнения $V=\frac{S}{2{,}5}=\frac{2}{5}S,$ подставляем это значение V во второе уравнение: $\left(\frac{2}{5}S+20\right)2=S+15,$ $\frac{1}{5}S=25,$ $S=125.$

Ответ: 125 км. ▲

Пример 2. Сумма цифр двузначного числа равна 15. Если эти цифры поменять местами, то получится число, которое на 27 больше исходного. Найдите эти числа.

Δ Пусть данное число $\overline{ab}$, т. е. число десятков равно a, а число единиц равно b. Из первого условия задачи имеем: $a+b=15$. Если из числа $\overline{ba}$ вычесть число $\overline{ab}$, то получится 27, отсюда получаем второе уравнение: $10b+a-(10a+b)=27.$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} a+b=15, \\ -9a+9b=27, \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=15, \\ a-b=-3. \end{cases}$$

Сложим уравнения последней системы, получаем: $2a=12,\ a=6,$ тогда $b=9.$ Заданное число 69, второе число 96.

Ответ: 69 и 96. ▲

Пример 3. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько нужно взять каждого из этих сортов стали, чтобы получилось 140 т стали с содержанием никеля 30%?

Δ Обозначим через x массу стали с 5% содержанием никеля и через y массу стали с 40% содержанием никеля. Тогда $x+y=140$. В x тоннах стали содержится $0,05x$ никеля, а в y тоннах стали содержится $0,4y$ никеля. Масса никеля равна $0,05x+0,4y$ и составляет 30% от 140 т, т. е. $\frac{3}{10}140$ т $=42$ т. Получили второе уравнение

$$0,05x+0,4y=42.$$

Умножим обе части уравнения на 20, получим: $x+8y=840.$ Для нахождения x и y получили систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=140, \\ x+8y=840. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое уравнение, получим: $7y=700,\quad y=100,$ тогда $x=140-y=40.$

Ответ: 40 т, 100 т. ▲

Пример 4. Оператор ЭВМ, работая с учеником, обрабатывает задачу за 2 ч 24 мин. Если оператор будет работать 2 ч, а ученик 1 ч, то будет выполнено $\frac{2}{3}$ всей работы. Сколько времени потребуется оператору и ученику в отдельности на обработку задачи?

Δ Обозначим всю работу за 1, производительность оператора за x и производительность ученика за y. Учитываем, что

$$2\,\text{ч}\,24\,\text{мин} = 2\frac{2}{5}\,\text{ч} = \frac{12}{5}\,\text{ч}.$$

Из первого условия задачи следует, что $(x+y)\frac{12}{5}=1$. Из второго условия задачи следует, что $2x+y=\frac{2}{3}$. Получили систему уравнений

$$\begin{cases} (x+y)\dfrac{12}{5}=1, \\ 2x+y=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Решаем эту систему методом подстановки:

$$y=\frac{2}{3}-2x;\ \left(x+\frac{2}{3}-2x\right)\frac{12}{5}=1;\ \left(\frac{2}{3}-x\right)\frac{12}{5}=1;\ \frac{12}{5}x=\frac{8}{5}-1;$$

$$\frac{12}{5}x=\frac{3}{5};\ x=\frac{1}{4};\quad y=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

Ответ: Для оператора понадобится 4 часа ($1:\frac{1}{4}=4$), а ученику – 6 часов ($1:\frac{1}{6}=6$). ▲

Контрольные вопросы

1(4). Постройте графики уравнений:

а) $2x-y=3$;

б) $(x-2y)(y+3)(2x+1)=0$;

в) $y=|x-2|+1$;

г) $|x+y-3|=|x-y+1|$.

2(2). Решите систему уравнений методом подстановки:

$$\begin{cases} x+y=-1, \\ 3x-2y=2. \end{cases}$$

3(2). Решите систему уравнений методом сложения:

$$\begin{cases} 4x+3y=7, \\ 3x-4y=-1. \end{cases}$$

4(2). Найдите точку пересечения прямых:

$$2(y+1)-3(x-1)-5=0 \text{ и } (y+2)+2(x-3)+4=0.$$

5(3). Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} 2x-2y=2, \\ -3x+3y=-3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x-3y=-3, \\ -2x+2y=-2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x-3y=2, \\ 3x+2y=3? \end{cases}$

6(2). При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 3x+(2a-1)y=3, \\ 2x-3y=2 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

7(2). При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 2x+y=3, \\ 4x+2y=|2a+3| \end{cases}$$

не имеет решений?

8(3). Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x+y=2, \\ |x-y|=1. \end{cases}$$

9(3). Постройте график уравнения:

$$2|x|+|y|=2.$$

10(3). Решите в целых числах уравнение:

$$(x+y)(y-1)=3.$$

Задачи

Решите системы уравнений:

1(3). $$\begin{cases} \dfrac{2}{2x+y+2} - \dfrac{1}{x-2y+2} = 3, \\ \dfrac{3}{2x+y+2} + \dfrac{4}{x-2y+2} = -1. \end{cases}$$

2(4). $$\begin{cases} |x-y| = 1, \\ |x| + |y| = 2. \end{cases}$$

3(3). $$\begin{cases} x - y + 2z = -2, \\ 2x + y - z = 4, \\ -x + 2y - z = 2. \end{cases}$$

4(4). При всех значениях параметра a решите систему уравнений:

$$\begin{cases} (2-a)x + y = 1, \\ 2(7-3a)x + (a+1)y = 2a - 2. \end{cases}$$

5(4). В первом туре олимпиады по математике для восьмых и девятых классов участвовало 160 школьников. Известно, что 30% восьмиклассников и 60% девятиклассников не прошли на второй тур олимпиады. В результате в этом туре приняло участие 85 школьников. Сколько восьмиклассников и сколько девятиклассников участвовало во втором туре олимпиады?

6(4). Искомое число больше 400 и меньше 500. Найдите его, если сумма его цифр равна 9 и оно равно $\dfrac{47}{36}$ числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке.

7(4). Три сенокосилки вместе скашивают поле за 5 ч., первая и вторая – за 10 ч., а вторая и третья – за 8 ч. За сколько часов скашивает поле каждая из них в отдельности?

8(4). Из пункта A в пункт B двигалась колонна машин. В середине пути у одной из машин произошла поломка, на устранение которой ушла $\frac{1}{12}$ часть времени, за которое колонна проходит весь путь. Во сколько раз нужно увеличить скорость отставшей машине, чтобы приехать в пункт B одновременно с колонной?

9(4). Для наполнения бассейна водой проведены четыре трубы. Если открыть первую, вторую и четвёртую трубы, то бассейн наполнится водой за 1 ч. 20 мин; если первую, вторую и третью – за 2 ч. Если же будут открыты только третья и четвёртая трубы, то бассейн наполнится водой за 1 ч. 20 мин. За какое время будет наполнен водой бассейн, если открыть все четыре трубы?

10(4). Решите в целых числах уравнение:

$$2xy - 2x - y = 5.$$