**Министерство образования и науки Российской Федерации**
**Московский физико-технический институт**
**(государственный университет)**
**Заочная физико-техническая школа**

# МАТЕМАТИКА

## Квадратные корни

Задание №4 для 8-х классов

(2015 – 2016 учебный год)

г. Долгопрудный, 2016

*Составитель*: Т.Х. Яковлева, старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ.

Математика: задание №4 для 8-х классов (2015 – 2016 учебный год), 2016, 22 с.

**Дата отправления заданий по физике и математике – 10 марта 2016 г.**

Составитель:
**Яковлева Тамара Харитоновна**
Подписано 14.01.16. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,44.
Уч.-изд. л. 1,28. Тираж 400. Заказ №2-з.

Заочная физико-техническая школа
Московского физико-технического института
(государственного университета)

ООО «Печатный салон ШАНС»

Институтский пер., 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141700.
ЗФТШ, тел./факс (495) 408-51-45 – **заочное отделение.**
тел./факс (498) 744-6 3-51 – **очно-заочное отделение,**
тел. (498) 744-65-83 – **очное отделение.**

***e-mail: zftsh@mail.mipt.ru***

**Наш сайт: www.school.mipt.ru**

## Введение

Дорогие ребята!

Вы получили очередное задание по математике. В этом задании мы знакомим вас с важным математическим понятием – арифметическим квадратным корнем. Постарайтесь хорошо справиться с этим заданием. Оно подготовит вас к решению следующего задания, в котором мы рассмотрим квадратные уравнения.

## §1. Определение арифметического квадратного корня

Рассмотрим простейшую задачу. Пусть площадь квадрата равна $25$. Требуется определить сторону квадрата. Если сторона квадрата равна $x$, то для нахождения длин сторон квадрата получаем уравнение $x^2 = 25$. Этому уравнению удовлетворяют два числа: $5$ и $-5$. Эти числа называют <u>квадратными корнями</u> числа $25$. Заметим, что один корень является положительным, а второй корень является отрицательным числом.

<u>Арифметическим квадратным корнем</u> из числа $a$ называется неотрицательное число, квадрат которого равен $a$.

Обозначают арифметический квадратный корень так: $\sqrt{a}.$

Например, $\sqrt{64} = 8;\ \sqrt{1,44} = 1,2;\ \sqrt{0} = 0.$

Равенство $\sqrt{a} = b$ является верным, если выполняются два условия: 1) $b \geq 0$ и 2) $b^2 = a.$

При $a < 0$ выражение $\sqrt{a}$ не имеет смысла, т. к. квадрат любого числа – число неотрицательное. Поэтому выражения $\sqrt{-49}$ и $\sqrt{-3,5}$ не имеют смысла.

Из определения арифметического корня следует, что если $\sqrt{a}$ имеет смысл, то $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ и $\sqrt{a^2} = |a|.$

Докажем, что, действительно, $\sqrt{a^2} = |a|.$ Если $a \geq 0,$ то из определения арифметического корня следует, что $\sqrt{a^2} = |a|.$

Если же $a < 0,$ то $-a > 0$ и $(-a)^2 = a^2.$ Таким образом, арифметический корень $\sqrt{a^2}$ равен $a$, если $a \geq 0$ и равен $(-a)$, если $a < 0,$ т. е. $\sqrt{a^2} = |a|.$

**Пример 1.** Найдите значение выражения:

а) $2\sqrt{12,25}-0,1\cdot\sqrt{0,25}$; б) $\sqrt{(-9)^2}$; в) $\sqrt{-16,2}$.

а) Из определения арифметического корня следует, что $\sqrt{12,25}=3,5,$ т. к. $3,5>0$ и $3,5^2=12,25;$ $\sqrt{0,25}=0,5,$ т. к. $0,5>0$ и $0,5^2=0,25.$ Получаем: $2\cdot3,5-0,1\cdot0,5=7-0,05=6,95.$

б) $\sqrt{(-9)^2}=9,$ т. к. $\sqrt{(-9)^2}=|-9|=9.$

в) Данное выражение не имеет смысла, т. к. квадрат любого числа является неотрицательным числом.

**Пример 2.** При каких $x$ имеет смысл выражение:

а) $\dfrac{3x}{\sqrt{x-1}}$; б) $\dfrac{2x+1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}$?

а) Выражение $\sqrt{x-1}$ определено, если $x-1\ge0$, т. е. при $x\ge1$. Но так как $\sqrt{x-1}$ стоит в знаменателе, то он не должен быть равен нулю, т. е. данное выражение имеет смысл при $x>1$.

б) Выражение $\sqrt{x}$ определено при $x\ge0$, а выражение $\sqrt{x+2}$ определено при $x+2\ge0, x\ge-2$. Таким образом, при $x\ge0$ определены оба корня. При таких $x$ имеем: $\sqrt{x}\ge0$ и $\sqrt{x+2}>0$, поэтому знаменатель при $x\ge0$ не обращается в нуль, значит, при $x\ge0$ данное выражение имеет смысл.

**Пример 3.** Решите уравнение:

а) $\sqrt{x}+2=0,$ б) $\sqrt{x}-3=0,$ в) $\sqrt{5x+6}=6,$ г) $\sqrt{3x-7}=-5.$

а) Арифметический корень $\sqrt{x}$ определён при $x\ge0,$ при этом $\sqrt{x}\ge0,$ значит, при любом $x\ge0$ выражение $\sqrt{x}+2\ge2,$ поэтому данное уравнение не имеет решений.

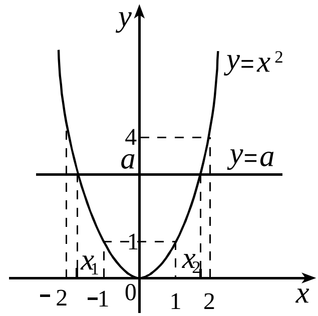
б) $\sqrt{x}=3.$ Из определения арифметического корня следует, что $\left(\sqrt{x}\right)^2=x=9,$ т. е. $x=9$ является корнем уравнения.

в) Предположим, что данное уравнение имеет решение, тогда $\left(\sqrt{5x+6}\right)^2=5x+6=6^2$. Отсюда уже видно, что $5x+6>0$, т. е. выражение $\sqrt{5x+6}$ определено. Решаем уравнение: $5x+6=36,$ $5x=30,$ $x=6.$

г) Уравнение не имеет смысла, т. к. арифметический корень число неотрицательное, а число $-5<0.$

## §2. Уравнение $x^2 = a$

Если $a < 0$, то уравнение $x^2 = a$ не имеет решений. Если $a = 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = 0$. Рассмотрим теперь уравнение $x^2 = a$ при $a > 0$.




Рассмотрим графики функций $y = x^2$ и $y = a$. Если $a = 1$, то уравнение $x^2 = 1$ имеет два корня: 1 и $-1$. Если $a = 4$, то уравнение $x^2 = 4$ имеет два корня: 2 и $-2$. Один из корней совпадает с арифметическим корнем из числа 4, а второй корень – число, противоположное первому корню.

Рассмотрим теперь уравнение $x^2 = 2$.

В первом задании мы уже говорили о том, что не существует рационального числа, квадрат которого равен двум. Арифметический корень $\sqrt{2}$ является числом иррациональным.

**Пример 1.** Докажите, что число $\sqrt{7}$ является числом иррациональным.

Δ Предположим, что $\sqrt{7}$ является числом рациональным, т. е. $\sqrt{7} = \frac{m}{n}$, где $n$ – натуральное число, $m$ – целое число и $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь. Из определения арифметического корня следует, что $m > 0$, т. е. $m$ должно также быть натуральным числом. Тогда

$$\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7 = \frac{m^2}{n^2}, \quad 7n^2 = m^2.$$

Левая часть полученного выражения делится на 7, поэтому и $m^2$ делится на 7, т. е. $m$ делится на 7. Предположим, что число $m$ не делится на 7, тогда $m = 7k + p$, где $p$ может быть равным 1, 2, 3, 4, 5, 6. Рассмотрим уравнение: $7n^2 = \left(7k + p\right)^2$,

$$7n^2 = 49k^2 + 14kp + p^2.$$

Выражение $p^2$ принимает значения 1, 4, 9, 16, 25, 36. Ни одно из этих чисел не делится на 7, следовательно $p = 0$, тогда $m = 7k$. Из уравнения $7n^2 = 49k^2$, $n^2 = 7k^2$. Тогда легко установить, что $n$ делится на 7, т. е. $n = 7q$, но тогда дробь $\frac{m}{n}$ сократимая, что противоречит нашему предположению. Следовательно, число $\sqrt{7}$ является иррациональным числом. ▲

Из рисунка следует, что если $a > b \geq 0,$ то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$. Поэтому, например, $\sqrt{119} > \sqrt{80}; \sqrt{2,37} > \sqrt{1,5}.$

В школьных учебниках доказываются три теоремы.

Теорема 1. Если $a > b > 0,$ то $\sqrt{a} > \sqrt{b}.$

**Пример 2.** Сравните числа $a = 2\sqrt{3}$ и $b = \frac{1}{2}\sqrt{47}.$

Δ Из определения арифметического корня следует, что

$a^2 = 4 \cdot 3 = 12;$ $b^2 = \frac{1}{4} \cdot 47 = 11\frac{3}{4}.$ Так как $12 > 11\frac{3}{4},$ то число $a > b.$ ▲

**Пример 3.** Найдите значение выражения

$$\left(-\sqrt{3}\right)^2 - 5\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}.$$

$$\left(-\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3; \; 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 2\left(\sqrt{3}\right)^2 = 2 \cdot 3 = 6.$$

Получаем: $3 - 5 \cdot 3 + 6 = -6.$ ▲

**Пример 4.** Между какими соседними натуральными числами расположено число $a = \frac{1}{3}\sqrt{209}$?

Δ $a^2 = \left(\frac{1}{3}\sqrt{209}\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot 209 = 23\frac{2}{3}.$ Заметим, что $16 < 23\frac{2}{3} < 25,$ поэтому $\sqrt{16} < a < \sqrt{25},$ т. е. $4 < a < 5.$ ▲

## §3. Свойства арифметического квадратного корня

В школьном учебнике у вас доказываются теоремы.

**Теорема 2.** Если $a \geq 0$ и $b \geq 0,$ то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$

**Теорема 3.** Если $a \geq 0$ и $b > 0,$ то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$

**Пример 1.** Найдите значение выражения (без калькулятора):

а) $\sqrt{5 \cdot 35 \cdot 175};$ б) $\sqrt{5\frac{11}{49}};$ в) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{192}};$ г) $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}};$ д) $\sqrt{16^3 \cdot 4^4}.$

а) $\sqrt{5\cdot 35\cdot 175}=\sqrt{175\cdot 175}=175.$

б) $\sqrt{5\frac{11}{49}}=\sqrt{\frac{256}{49}}=\frac{16}{7}.$

в) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{192}}=\sqrt{\frac{75}{192}}=\sqrt{\frac{25}{64}}=\frac{5}{8}.$

г) $\sqrt{\frac{149^2-76^2}{457^2-384^2}}=\sqrt{\frac{(149-76)(149+76)}{(457-384)(457+384)}}=\sqrt{\frac{73\cdot 225}{73\cdot 841}}=$

$=\sqrt{\frac{225}{841}}=\frac{\sqrt{225}}{\sqrt{841}}=\frac{15}{29}.$

д) $\sqrt{16^3\cdot 4^4}=\sqrt{\left(4^2\right)^3\cdot 4^4}=\sqrt{4^6\cdot 4^4}=\sqrt{4^{10}}=\sqrt{\left(4^5\right)^2}=4^5.$

Можно решать и другим способом.

$$\sqrt{16^3\cdot 4^4}=\sqrt{16^2\cdot 16\cdot 4^4}=\sqrt{16^2}\cdot\sqrt{16}\cdot\sqrt{\left(4^2\right)^2}=16\cdot 4\cdot 4^2=$$
$$=4^2\cdot 4\cdot 4^2=4^5.\ \blacktriangle$$

Рассмотрим $\sqrt{48}$. Преобразуем это выражение:

$$\sqrt{48}=\sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}=4\sqrt{3}.$$

В этом случае мы говорим, что множитель $4$ вынесли из-под знака корня.

Теперь рассмотрим выражение $5\sqrt{7}$, преобразуем его:

$$5\sqrt{7}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{25\cdot 7}=\sqrt{175}.$$

В этом случае говорим, что множитель $5$ внесли под знак корня.

**Пример 2.** Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{\left(5\sqrt{13}-4\sqrt{19}\right)^2}$; б) $\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)^3\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^5}$;

в) $-\sqrt{-a^4b^{11}}$; г) $\sqrt{21(xy)^2}$, если $xy\le 0$.

$\Delta$ а) Так как $\sqrt{a^2}=|a|$, то $\sqrt{\left(5\sqrt{13}-4\sqrt{19}\right)^2}=\left|5\sqrt{13}-4\sqrt{19}\right|.$

Определим знак числа $5\sqrt{13}-4\sqrt{19}.$ Числа $5\sqrt{13}$ и $4\sqrt{19}$ – положительные. Рассмотрим их квадраты: $\left(5\sqrt{13}\right)^2=25\cdot 13=325$ и $\left(4\sqrt{19}\right)^2=16\cdot 19=304$. Так как $304<325,$ то $\sqrt{304}<\sqrt{325},$ т. е. $5\sqrt{13}>4\sqrt{19},$ поэтому $\left|5\sqrt{13}-4\sqrt{19}\right|=5\sqrt{13}-4\sqrt{19}.$

б) $\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)^3\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^5}=$

$=\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)^2\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^4\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}=$

$=\left|\sqrt{7}-\sqrt{11}\right|\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}.$

Число $\sqrt{7}<\sqrt{11},$ т. к. $\left(\sqrt{7}\right)^2=7, \left(\sqrt{11}\right)^2=11$ и $7<11$. Поэтому $\sqrt{7}-\sqrt{11}<0,$ т. е. $\left|\sqrt{7}-\sqrt{11}\right|=\sqrt{11}-\sqrt{7}.$

Окончательно получаем:

$$\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}.$$

в) Так как $a^4\geq 0,$ то корень определён, если $-b^{11}\geq 0,$ т. е. $b^{11}\leq 0, b\leq 0.$

$$-\sqrt{a^4\left(-b^5\right)^2(-b)}=-a^2\left(-b^5\right)\sqrt{-b}=a^2b^5\sqrt{-b}.$$

г) $\sqrt{21(xy)^2}=|xy|\sqrt{21}=-xy\sqrt{21}.$ ▲

**Пример 3.** Внесите множитель под знак корня:

а) $\left(5-\sqrt{37}\right)\sqrt{\sqrt{2}+3};$ б) $(2a-1)\sqrt{1-2a};$ в) $-3xy\sqrt{-\dfrac{1}{(xy)^3}}.$

$\Delta$ При решении этих примеров используем формулу $\sqrt{a^2}=|a|.$

а) Число $5-\sqrt{37}<0,$ т. к. $5^2=25,$ $\left(\sqrt{37}\right)^2=37$ и $25<37$. Поэтому

$$\left(5-\sqrt{37}\right)\sqrt{\sqrt{2}+3}=-\left(\sqrt{37}-5\right)\sqrt{\sqrt{2}+3}=-\sqrt{\left(\sqrt{37}-5\right)^2\left(\sqrt{2}+3\right)}.$$

б) Корень $\sqrt{1-2a}$ определён, если $1-2a\geq 0, 2a\leq 1, a\leq\dfrac{1}{2}$. При таких $a$ выражение $2a-1\leq 0$. Поэтому

$$(2a-1)\sqrt{1-2a}=-(1-2a)\sqrt{1-2a}=-\sqrt{(1-2a)^2(1-2a)}=-\sqrt{(1-2a)^3}.$$

в) Корень $\sqrt{-\frac{1}{(xy)^3}}$ определён, если $xy<0$. Поэтому

$$-3xy\sqrt{-\frac{1}{(xy)^3}}=3(-xy)\sqrt{-\frac{1}{(xy)^3}}=\sqrt{9(-xy)^2\left(-\frac{1}{(xy)^3}\right)}=\sqrt{\frac{-9}{xy}}.$$

**Пример 4.** Сравните числа $a$ и $b$:

а) $a=\sqrt{3}+\sqrt{11}$ и $b=\sqrt{6}+\sqrt{8}$;

б) $a=2-\sqrt{3}$ и $b=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$;

в) $a=\frac{2}{5+3\sqrt{3}}-\frac{2}{5-3\sqrt{3}}$ и $b=\sqrt{110}.$

$\Delta$ а) Числа $a$ и $b$ положительные. Рассмотрим квадраты этих чисел. Имеем: $a^2=3+2\sqrt{3}\sqrt{11}+11=14+2\sqrt{33},$ $b^2=6+2\sqrt{6}\sqrt{8}+8=$ $=14+2\sqrt{48}.$ Так как $48>33,$ то $\sqrt{48}>\sqrt{33}, 2\sqrt{48}>2\sqrt{33},$ поэтому $b^2>a^2$ и $b>a.$

б) Число $a>0,$ т. к. $2^2>\left(\sqrt{3}\right)^2=3.$ Число $7-4\sqrt{3}>0,$ т. к. $7^2>\left(4\sqrt{3}\right)^2=48.$ Отсюда следует, что число $b$ определено и оно больше нуля.

Таким образом, числа $a$ и $b$ положительные. Рассмотрим их квадраты: $a^2=\left(2-\sqrt{3}\right)^2=4-4\sqrt{3}+3=7-4\sqrt{3},$ $b^2=7-4\sqrt{3}.$ Следовательно, $a=b.$

в) $a=\frac{2}{5+3\sqrt{3}}-\frac{2}{5-3\sqrt{3}}.$

Приводим дроби к общему знаменателю, получаем:

$$a=\frac{10-6\sqrt{3}-10-6\sqrt{3}}{\left(5+3\sqrt{3}\right)\left(5-3\sqrt{3}\right)}=\frac{-12\sqrt{3}}{-2}=6\sqrt{3}=\sqrt{108}.$$

Так как $110>108,$ то $\sqrt{110}>\sqrt{108}$ и $b>a.$

**Пример 5.** а) Укажите два рациональных числа, лежащих между числами $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}.$

б) Укажите два иррациональных числа, лежащих между числами $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}.$

$\Delta$ а) Из теоремы сравнения корней следует, что $\sqrt{1}<\sqrt{3}<\sqrt{4}$, т. е. $1<\sqrt{3}<2.$ Заметим, что $1{,}8^2=3{,}24>3$, а $1{,}9^2=3{,}61>3,$ таким образом $\sqrt{3}<1{,}8<2<\sqrt{5}$, т. е. число $1{,}8$ является числом рациональным и располагается между числами $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}.$ Число $1{,}9$ удовлетворяет неравенствам $\sqrt{3}<1{,}9<2<\sqrt{5}$, т. е. $1{,}9$ также располагается между числами $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}.$

б) Иррациональные числа являются бесконечными непериодическими десятичными дробями. Рассмотрим дробь $a=1{,}810110111011110\ldots.$ Это бесконечная непериодическая десятичная дробь, после цифры $8$ идёт цифра $1,$ затем ноль, затем 2 цифры 1, снова ноль, и т. д. Данная дробь больше, чем $1{,}8,$ т. к. после цифры $8$ идёт $1$. Для числа $a$ выполняются неравенства

$$\sqrt{3}<a<2<\sqrt{5}.$$

Аналогично строим вторую дробь: $b=1{,}820220222022220\ldots,$ $\sqrt{3}<b<2<\sqrt{5}.$

**Пример 6.** Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{2}{3\sqrt{5}-\sqrt{7}}$; б) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}+\sqrt{5}}$.

$\Delta$ Эту задачу надо понимать так: следует так преобразовать дробь, чтобы в знаменателе отсутствовали квадратные корни.

При решении этих задач полезно использовать формулу

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2.$$

а) Умножим числитель и знаменатель дроби на $3\sqrt{5}+\sqrt{7}$. Получим:

$$\frac{2\left(3\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}{\left(3\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)\left(3\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}=\frac{6\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{\left(3\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{6\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{45-7}=\frac{3\sqrt{5}+7}{19}.$$

б) Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение

$\left(3-\sqrt{2}\right)-\sqrt{5}\neq 0.$ Получим: $\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\left(3-\sqrt{2}\right)-\sqrt{5}\right)}{\left(\left(3-\sqrt{2}\right)+\sqrt{5}\right)\left(\left(3-\sqrt{2}\right)-\sqrt{5}\right)}=$

$$=\frac{3-\sqrt{2}-\sqrt{5}+3\sqrt{2}-2-\sqrt{10}}{\left(9+2-6\sqrt{2}\right)-5}=\frac{1+2\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{10}}{6\left(1-\sqrt{2}\right)}.$$

В полученной дроби умножаем числитель и знаменатель на $1+\sqrt{2}$, получаем: $\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+2\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{10}\right)}{6(1-2)}=$

$$=-\frac{1+\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4-\sqrt{5}-\sqrt{10}-\sqrt{10}-\sqrt{20}}{6}=$$

$$=-\frac{5+3\sqrt{2}-3\sqrt{5}-2\sqrt{10}}{6}.\ \blacktriangle$$

## §4. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни

Покажем на примере, как можно тождественными преобразованиями упрощать выражения, содержащие квадратные корни. При этом мы будем пользоваться правилами, которые указали в предыдущем параграфе, как, например, правило произведения корней, правило деления корней, правило вынесения множителя из-под знака корня и т. д.

**Пример 1.** Упростите выражение $5\sqrt{18}+7\sqrt{50}-30\sqrt{2}.$

$\Delta$ Заметим, что $5\sqrt{18}=5\sqrt{9\cdot 2}=5\sqrt{9}\sqrt{2}=15\sqrt{2}$ и $7\sqrt{50}=$ $=7\sqrt{25\cdot 2}=7\sqrt{25}\sqrt{2}=35\sqrt{2}.$

В итоге получаем: $15\sqrt{2}+35\sqrt{2}-30\sqrt{2}=20\sqrt{2}.$ $\blacktriangle$

**Пример 2.** Упростите выражение:

а) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{a+1+4\sqrt{a-3}}$.

$\Delta$ а) Заметим, что $7=4+3=2^2+\left(\sqrt{3}\right)^2$, тогда

$$7+4\sqrt{3}=2^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2.$$

Поэтому

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=\left|2+\sqrt{3}\right|=2+\sqrt{3}.$$

б) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{1+2-2\sqrt{2}}=\sqrt{1+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=$ $=\left|1-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-1.$

в) $\sqrt{a+1+4\sqrt{a-3}}=\sqrt{(a-3)+4+4\sqrt{a-3}}=$

$=\sqrt{\left(\sqrt{a-3}\right)^2+2^2+2\cdot 2\sqrt{a-3}}=\sqrt{\left(\sqrt{a-3}+2\right)^2}=\sqrt{a-3}+2.$ ▲

**Пример 3.** Сократите дроби:

а) $\dfrac{a-b}{\sqrt{7a}-\sqrt{7b}}$; б) $\dfrac{64a-49b}{8\sqrt{a}-7\sqrt{b}}$; в) $\dfrac{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}{3x+3y+6\sqrt{xy}}$; г) $\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

Δ а) Заметим, что

$$a-b=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2,\ \sqrt{7a}=\sqrt{7}\cdot\sqrt{a},\ \sqrt{7b}=\sqrt{7}\cdot\sqrt{b},$$

подставляем эти выражения в данную дробь:

$$\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{7}\sqrt{a}-\sqrt{7}\sqrt{b}}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{7}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{7}}.$$

б) $\dfrac{64a-49b}{8\sqrt{a}-7\sqrt{b}}=\dfrac{\left(8\sqrt{a}\right)^2-\left(7\sqrt{b}\right)^2}{8\sqrt{a}-7\sqrt{b}}=\dfrac{\left(8\sqrt{a}-7\sqrt{b}\right)\left(8\sqrt{a}+7\sqrt{b}\right)}{8\sqrt{a}-7\sqrt{b}}=$

$$=8\sqrt{a}+7\sqrt{b}.$$

в) $\dfrac{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}{3x+3y+6\sqrt{xy}}=\dfrac{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}{\left(\sqrt{3x}\right)^2+\left(\sqrt{3y}\right)^2+2\cdot\sqrt{3x}\cdot\sqrt{3y}}=$

$$=\frac{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}{\left(\sqrt{3x}+\sqrt{3y}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{3y}}.$$

г) Преобразуем числитель дроби:

$$a\sqrt{a}-b\sqrt{b}=\left(\sqrt{a}\right)^2\sqrt{a}-\left(\sqrt{b}\right)^2\sqrt{b}=\left(\sqrt{a}\right)^3-\left(\sqrt{b}\right)^3=$$

$$=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2\right)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+b+\sqrt{ab}\right).$$

В результате получаем: $\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(a+b+\sqrt{ab}\right)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=a+b+\sqrt{ab}.$ ▲

**Пример 4.** Докажите тождество

$$\left(\frac{\sqrt{m}}{n-\sqrt{mn}}+\frac{\sqrt{n}}{m-\sqrt{mn}}\right)\cdot\frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{n}+\sqrt{m}}=-1.$$

$\Delta$ Преобразуем выражение, стоящее в скобках:

$$\frac{\sqrt{m}}{n-\sqrt{mn}}+\frac{\sqrt{n}}{m-\sqrt{mn}}=\frac{\sqrt{m}}{\left(\sqrt{n}\right)^2-\sqrt{m}\cdot\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n}}{\left(\sqrt{m}\right)^2-\sqrt{m}\cdot\sqrt{n}}=$$

$$=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)}+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)}=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)}-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{m}\cdot\sqrt{m}-\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{m}\cdot\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)}=\frac{\left(\sqrt{m}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{m}\cdot\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{m}\cdot\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)}=\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{-\sqrt{nm}}.$$

Тождество доказано. ▲

**Пример 5.** Решите уравнение $\sqrt{4x^2+16x+16}-\sqrt{x^2-6x+9}=4.$

$\Delta$ Преобразуем левую часть уравнения:

$$\sqrt{4x^2+16x+16}-\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{4\left(x^2+4x+4\right)}-\sqrt{\left(x-3\right)^2}=$$

$$=\sqrt{4}\cdot\sqrt{\left(x+2\right)^2}-\sqrt{\left(x-3\right)^2}=2\left|x+2\right|-\left|x-3\right|.$$

После тождественных преобразований получили уравнение $2\left|x+2\right|-\left|x-3\right|=4.$

1) Пусть $x\geq 3,$ тогда $\left|x-3\right|=x-3, \left|x+2\right|=x+2$ и наше уравнение сводится к уравнению

$$2\left(x+2\right)-\left(x-3\right)=4;\ 2x+4-x+3=4;\ x+3=0;\ x=-3.$$

Это число меньше $3,$ поэтому при $x\geq 3$ решений нет.

2) Пусть теперь $-2<x<3.$ Тогда $\left|x-3\right|=3-x, \left|x+2\right|=x+2.$ Получаем уравнение $2x+4+x-3=4, 3x=3, x=1.$ Число $1$ удовлетворяет условию $-2<1<3,$ $x=1-$ решение.

3) Пусть $x\leq -2.$ Тогда $\left|x-3\right|=3-x, \left|x+2\right|=-x-2$ и приходим к уравнению $-2x-4-3+x=4, -x=11, x=-11.$ Число $-11<-2.$

**Ответ:** $1; -11.$ ▲

**Пример 6.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3\sqrt{x+3}-2\sqrt{y-2}=3,\\ 2\sqrt{x+3}+\sqrt{y-2}=9.\end{cases}$$

$\Delta$ Корень $\sqrt{x+3}$ определён при $x \geq -3$, а корень $\sqrt{y-2}$ определён при $y \geq 2$.

Умножив второе уравнение системы на $2$ и прибавив к первому уравнению, получаем: $7\sqrt{x+3} = 21,\ \sqrt{x+3} = 3,\ x+3 = 9,\ x = 6.$

Подставляем это значение для $x$ в первое уравнение, получаем:

$$3 \cdot 3 - 2\sqrt{y-2} = 3;\ 6 = 2\sqrt{y-2};\ \sqrt{y-2} = 3;\ y-2 = 9;\ y = 11.$$

**Ответ:** $(6;11)$. ▲

## §5. Преобразование двойных радикалов

Выражения вида $\sqrt{a+b\sqrt{c}}$ называют сложными или двойными радикалами. Мы уже рассматривали примеры, в которых можно было избавиться от внешних радикалов.

**Пример 1.** Освободитесь от внешнего радикала в выражении $\sqrt{23+4\sqrt{15}}$.

$\Delta$ Заметим, что выражение $23+4\sqrt{15} = 20+3+2\cdot 2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{3} =$ $= \left(2\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2$, тогда $\sqrt{23+4\sqrt{15}} = \sqrt{\left(2\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2} = \left|2\sqrt{5}+3\right| = 2\sqrt{5}+\sqrt{3}.$

**Пример 2.** Освободитесь от внешнего радикала в выражении $\sqrt{124-70\sqrt{3}}$.

$\Delta$ В этом примере укажем метод, по которому иногда можно избавляться от внешнего радикала. Подберём целые числа $a$ и $b$ такие, чтобы $\sqrt{124-70\sqrt{3}} = a - b\sqrt{3}$. Если такие числа есть, то должны выполняться такие условия:

$$\begin{cases} \left(a-b\sqrt{3}\right)^2 = 124-70\sqrt{3}, \\ a-b\sqrt{3} \geq 0. \end{cases}$$

Из первого условия получаем

$$a^2 - 2ab\sqrt{3} + 3b^2 = 124 - 70\sqrt{3},$$
$$a^2 + 3b^2 - 124 = 2ab\sqrt{3} - 70\sqrt{3}.$$

Так как $a$ и $b-$ целые числа, то выражение $a^2+3b^2-124$ является целым числом, значит, рациональным числом. Выражение $(2ab-70)\sqrt{3}$ является рациональным числом, если

$$\begin{cases}\left(a-b\sqrt{3}\right)^2=124-70\sqrt{3},\\ a-b\sqrt{3}\ge 0.\end{cases} \text{ и } 2ab-70=0, \text{ т. е. } ab=35.$$

Уравнению $ab=35$ удовлетворяют следующие пары чисел: $a=1, b=35;$ $a=5, b=7;$ $a=7, b=5;$ $a=35, b=1;$ $a=-1, b=-35;$ $a=-5, b=-7;$ $a=-7, b=-5;$ $a=-35, b=-1.$

Условию $a^2+3b^2-124=0$ удовлетворяют две пары чисел: $a=7, b=5$ и $a=-7, b=-5.$ Число $7-5\sqrt{3}$ не удовлетворяет условию $a-b\sqrt{3}\ge 0,$ а число $-7+5\sqrt{3}$ удовлетворяет этому условию. Таким образом, $\sqrt{124-70\sqrt{3}}=-7+5\sqrt{3}.$ ▲

В некоторых примерах удаётся избавиться от внешнего радикала, если воспользоваться тождеством

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Это тождество называют формулой двойного радикала. Оно справедливо, если $a>0, b>0$ и $a^2-b>0$. Тогда все три корня определены, $\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}>\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ и правая часть равенства положительна. Возведём в квадрат обе части равенства. Получим:

$$a\pm\sqrt{b}=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}\pm 2\sqrt{\frac{a^2-a^2+b}{4}},$$
$$a\pm\sqrt{b}=a\pm\sqrt{b}.$$

**Пример 2.** Освободитесь от внешнего радикала в выражении

$$\sqrt{56-\sqrt{2880}},$$

применяя формулу двойного радикала.

$$\triangle\ \sqrt{56-\sqrt{2880}}=\sqrt{\frac{56+\sqrt{3136-2880}}{2}}-\sqrt{\frac{56-\sqrt{3136-2880}}{2}}=$$
$$=\sqrt{\frac{56+16}{2}}-\sqrt{\frac{56-16}{2}}=6-\sqrt{20}=6-2\sqrt{5}.\ ▲$$

## §6. Построение графиков функций

В школьном курсе 7-го класса вы уже рассматривали график линейной функции $y = kx + b,$ графики функций $y = x^2$ и $y = x^3$. В этом году вы познакомились ещё с одной функцией, а именно, с функцией $y = \sqrt{x}.$

Составим таблицу значений этой функции. Очевидно, что функция определена при $x \geq 0.$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1/16 | 1/9 | 1/4 | 1 | 4 | 9 |
| $y$ | 0 | 1/4 | 1/3 | 1/2 | 1 | 2 | 3 |

Построим график этой функции.

**Пример 1.** Постройте графики функций:

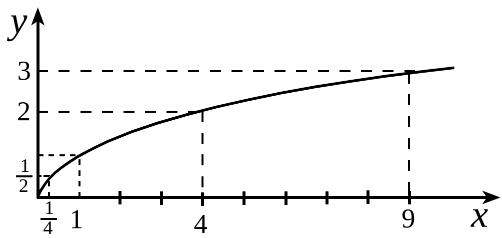



**Рис. 1** $\left(y = \sqrt{x}\right)$

а) $y = \sqrt{x^2};$ б) $y = -\sqrt{-x};$ в) $y = \sqrt{x+1};$

г) $y = \sqrt{|x+1|};$ д) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x + 1};$

е) $y = \left(-\sqrt{x}\right)^2.$

$\Delta$ а) Из определения арифметического корня следует, что

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

График данной функции приведён на рис. 2.

б) Из определения корня следует, что $-x \geq 0$, т. е. $x \leq 0$. Составим таблицу значений функции:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | $-1/16$ | $-1/4$ | $-1$ | $-4$ | $-9$ |
| $y$ | 0 | $-1/4$ | $-1/2$ | $-1$ | $-2$ | $-3$ |

График функции изображён на рис. 3.

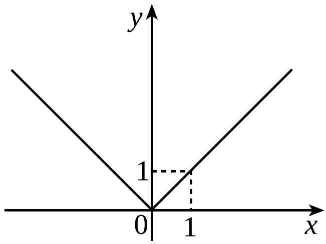



**Рис. 2** $\left(y=\sqrt{x^2}\right)$

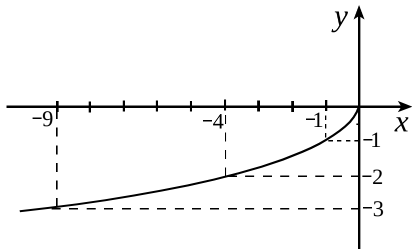



**Рис. 3** $\left(y=-\sqrt{-x}\right)$

в) Данная функция определена при $x+1 \geq 0, x \geq -1$. При $x=-1$ $y=0$, $x=3$ $y=2$, $x=8$ $y=3$. График данной функции получается из графика функции $y=\sqrt{x}$ параллельным сдвигом вдоль оси $Ox$ на одну единицу влево. Приводим график данной функции на рис. 4.

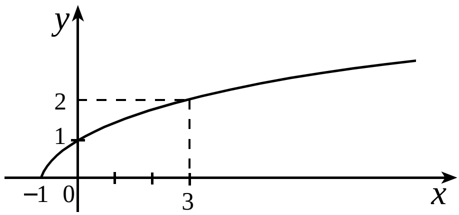



**Рис. 4** $\left(y=\sqrt{x+1}\right)$

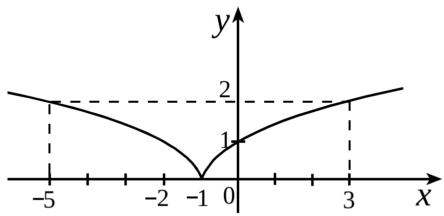



**Рис. 5** $y=\left(\sqrt{|x+1|}\right)$

г) Данная функция определена при всех $x$. При $x \geq -1$ выражение $|x+1| = x+1$, поэтому график данной функции совпадает с графиком функции $y=\sqrt{x+1}$, который мы привели на рис. 4. При $x \leq -1$ данная функция определена, при этом $y=\sqrt{-x-1}$. Заметим, что данная функция в точках, симметричных относительно точки $x=-1$, принимает равные значения. Например, при $x=0$ и $x=-2$ значения функции совпадают и равны $1$. В точках $3$ и $(-5)$ значения функции также совпадают и равны $2$. Про график данной функции говорят так: график функции симметричен относительно прямой $x=-1$. График данной функции приведён на рис. 5.

д) Преобразуем выражение, которым задаётся наша функция.

$$y=\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(x+1)^2}=|x-2|-|x+1|.$$

При $x\geq 2$ $y=x-2-x-1=-3$.

При $-1<x<2$ $y=-x+2-x-1=-2x+1$.

При $x\leq -1$ $y=-x+2+x+1=3$.

График функции изображён на рис. 6.

е) Данная функция определена при $x\geq 0$. Для этих значений график функции приведён на рис. 7.▲

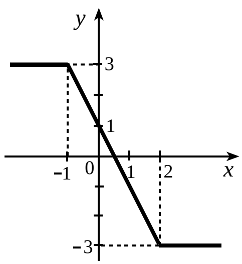



**Рис. 6**

$$\left(y=\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+2x+1}\right)$$

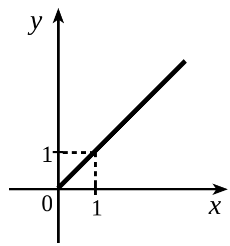



**Рис. 7**

$$y=\left(\left(-\sqrt{x}\right)^2\right)$$

**Пример 2.** Постройте график функции

$$y=\begin{cases}3-\sqrt{-x}, \text{ если } x\leq 0;\\ 3-\dfrac{5}{2}x, \text{ если } 0<x<2;\\ \sqrt{x-2}-2, \text{ если } x\geq 2.\end{cases}$$

Δ На рис. 3 в предыдущем примере мы строили график функции $y=-\sqrt{-x}$. Значения заданной функции при $x\leq 0$ получаются из значений функции $y=-\sqrt{-x}$ прибавлением числа $3$, т. е. график функции $y=3-\sqrt{-x}$ получается из графика функции $y=-\sqrt{-x}$ сдвигом параллельно оси $Oy$ на $3$ единицы вверх.

Рассмотрим функцию $y = 3 - \frac{5}{2}x.$ Её графиком является прямая, проходящая через точки $(0;3)$ и $(2;-2).$ График заданной функции при $0 < x < 2$ совпадает с графиком прямой $y = 3 - \frac{5}{2}x.$

При $x \geq 2$ можно сначала построить график функции $y = \sqrt{x-2}$, а затем сдвинуть его на 2 единицы вниз параллельно оси $Oy.$

Составим таблицу значений функции

| $x$ | –9 | –1 | 0 | 2 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 2 | 3 | –2 | 0 |

График функции приведён на рис. 8.▲

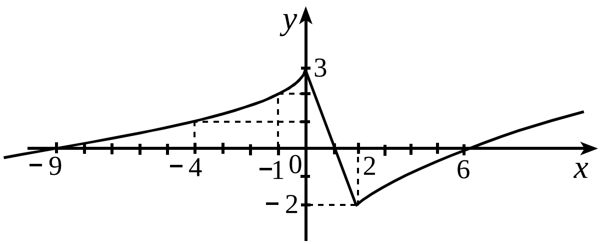



**Рис. 8**

**Контрольные вопросы**

**1(1).** Найдите значение выражения

$$\sqrt{54,76} - \frac{7}{3}\sqrt{66 + \frac{15}{49}}.$$

**2(2).** Заданы числа:

$$25\sqrt{7};\ \sqrt{6561};\ 1\frac{7}{9};\ -\sqrt{4356};\ 2\sqrt{17};\ 0;\ \sqrt{-25}.$$

Укажите, какие из них являются

а) натуральными числами;

б) целыми числами;

в) рациональными числами;

г) иррациональными числами;

д) действительными числами.

**3(2).** Расположите в порядке возрастания числа:

$$3,5;\quad -\sqrt{7,2};\quad -2\sqrt{2};\quad 2\sqrt{3};\quad \sqrt{12,7}.$$

**4(2).** Укажите все натуральные числа, лежащие между числами $\sqrt{8054}$ и $\sqrt{8537}$.

**5(2).** Укажите два каких – нибудь рациональных числа, лежащие между числами $\sqrt{12,1}$ и $\sqrt{12,4}$.

**6(2).** При каких значениях $b$ имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{-15b^2}$; б) $\sqrt{\left(-7b\right)^2}$; в) $\sqrt{-9b^2+30b-25}$.

**7(3).** Решите уравнение

а) $\sqrt{9-4x}=1$;

б) $\sqrt{5\tilde{o}-3}=-7$;

в) $\sqrt{4x^2-12x+9}=3$.

**8(2).** Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{2}{3\sqrt{7}+\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{1}{2\sqrt{5}-\sqrt{2}+3\sqrt{3}}$.

**9(3).** При каких значениях $x$ имеет смысл выражение:

а) $\dfrac{3x-4}{\sqrt{7x+9}}$;

б) $\dfrac{2x+5}{\sqrt{3x-1}-2}$;

в) $\dfrac{4x-1}{\sqrt{5x-2}-\sqrt{3-3x}}$.

**10(3).** Докажите, что

$$\frac{6+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6+4\sqrt{2}}}+\frac{6-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}=\sqrt{8}.$$

## Задачи

**1(3).** Докажите, что число $\sqrt{5}$ является иррациональным числом.

**2(2).** а) Приведите пример двух иррациональных чисел, сумма которых является числом рациональным.

б) Приведите пример двух иррациональных чисел, произведение которых является числом рациональным.

**3(3).** Укажите два каких-нибудь иррациональных числа, лежащих между числами $\frac{1}{3}$ и $\frac{4}{11}$.

**4(2).** Сравните числа (не пользуясь калькулятором):

а) $a=\sqrt{53}+\sqrt{47}$ и $b=\sqrt{46}+\sqrt{54}$;

б) $a=\dfrac{3}{\sqrt{5}-2}+\dfrac{2}{\sqrt{5}+2}$ и $b=6\sqrt{2\sqrt{5}+3}$.

**5(3).** Сократите дробь:

а) $\dfrac{16x-49}{4\sqrt{x}+7}$; б) $\dfrac{a\sqrt{a}+11\sqrt{11}}{a-\sqrt{11a}+11}$; в) $\dfrac{18x+4}{3\sqrt{-2x}+2}$.

**6(2).** Решите уравнение:

а) $5-\sqrt{-x}=2$; б) $(5x+3)\sqrt{2x-1}=2(5x+3)$.

**7(3).** Внесите множитель под знак корня:

а) $-6b\sqrt{3b}$; б) $5a\sqrt{-3a}$; в) $(4-3x)\sqrt{2x-3}$.

**8(3).** Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{169x^3y^{34}}$ при $y<0$;

б) $\sqrt{-25a^{35}b^{43}}$ при $a>0, b<0$;

в) $\sqrt{\left(4-3\sqrt{2}\right)^3\left(3\sqrt{5}-7\right)^7}$ .

**9(3).** Упростите выражение:

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{4(a-1)}}{a-\sqrt{4(a-1)}}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{4(a-1)}}{a+\sqrt{4(a-1)}}}-\frac{4}{a-2}, \text{ если } a>2.$$

**10(4).** Освободитесь от внешнего корня в выражении $\sqrt{73-\sqrt{4704}}$ (задачу решите двумя способами).

**11(8).** Постройте график функции:

а) $y=\sqrt{4x^2-20x+25}$;

б) $y=\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$;

в) $y=\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(x+3)^2}$;

г) $y=\begin{cases}-\dfrac{8}{x}, & x\le -2;\\ x^2, & x\in(-2;1);\\ 1-\sqrt{x-1}, & \text{если } x\ge 1.\end{cases}$